

### Problema resuelto de ajuste de modelos

1. El número  $Y$  de bacterias por unidad de volumen presente en un cultivo después de  $X$  horas está dado en la tabla siguiente:

Nº Horas (X)	0.5	1	2	3	4	5	6
Nº Bacterias (Y)	30	45	63	90	130	183	274

Para estimar el número de bacterias se plantea los siguientes modelos:

$$\text{i) } Y = AX + B \quad \text{ii) } Y = AX^B \quad \text{iii) } Y = AB^X$$

- a) ¿Cuál de los modelos planteados es mejor para estimar el número de bacterias?, ¿Por qué?  
 b) En el mejor modelo estime los parámetros  $A$  y  $B$  y escriba el modelo final.  
 c) Determine el error estándar de estimación del mejor modelo ajustado.  
 d) Determine un intervalo de longitud cuatro errores estándar para estimar el número de bacterias a las 5.5 horas usando el mejor modelo.  
 e) ¿A qué hora se debe detener el cultivo para que el número de bacterias no sobrepase las 280 bacterias?

**Desarrollo:**

a) i)  $Y = AX + B \Rightarrow r(X, Y) = 0.9626$

ii)  $Y = AX^B \Rightarrow \log Y = B \log X + \log A \Rightarrow r(\log X, \log Y) = 0.9608$

iii)  $Y = AB^X \Rightarrow \log Y = (\log B)X + \log A \Rightarrow r(X, \log Y) = 0.9963$

Respuesta: El modelo iii) es mejor por que tiene un coeficiente de correlación lineal en valor absoluto mayor que los otros.

b) Estimación de parámetros:

$$\hat{k} = 1.4483 = \log \hat{A} \Rightarrow \hat{A} = 10^{1.4483} = 28.0737$$

$$\hat{m} = 0.1656 = \log \hat{B} \Rightarrow \hat{B} = 10^{0.1656} = 1.4642$$

Luego el modelo final ajustado es:  $\hat{Y} = f(X) = 28.0737 * (1.4642)^X$

c) Estimación del error estándar

$X_i$	$Y_i$	$\hat{Y}_i = f(X_i)$	$e_i^2 = (Y_i - f(X_i))^2$
0.5	30	33.9703	15.7633
1	45	41.1055	15.1671
2	63	60.1867	7.9147
3	90	88.1254	3.5141
4	130	129.0331	0.9349
5	183	188.9303	35.1685
6	274	276.6312	6.9232

$$\sum_{i=1}^7 e_i^2 = 85.3858$$

Luego el error estándar estimado es:  $\hat{S}_e = \sqrt{\frac{85.3858}{7}} = 3.4926$

d)  $f(5.5) = 228.6135$

$$\left[ f(5.5) - 2 * \hat{S}_e, f(5.5) + 2 * \hat{S}_e \right] = [221.6283, 235.5987]$$

Respuesta: Un intervalo de amplitud 4 errores estándar para estimar el número de bacterias a las 5.5 horas es [221.6283, 235.5987]

e) .

$$\hat{Y} \leq 280 \Rightarrow 28.0737 * (1.4642)^X \leq 280$$

$$\Rightarrow (1.4642)^X \leq \frac{280}{28.0737} \Rightarrow X \leq \frac{\log\left(\frac{280}{28.0737}\right)}{\log(1.4642)} = 6.0317$$

Respuesta: Para que el número de bacterias no sobrepase las 280 bacterias, el cultivo se debe detener a lo más a las 6.0317 horas.