Solución TAREA Nº 2
ESTADÍSTICA INFERENCIAL

Problema 1

Sean A y B sucesos tales que $P(A) = \frac{1}{6}$; $P(B) = \frac{1}{5}$; $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$

Determine

a) $P_B(A)$
b) $P_B(A \cap B^C)$
c) $P_{B^C}(A)$
d) $P_{A \cup B}(A)$
e) ¿Son A y B sucesos independientes? ¿Por qué?

Problema 2

En una familia aparece un caso de difteria y otro de escarlatina. En este grupo familiar vive un niño de 5 años, que no ha tenido ninguna de estas enfermedades. Suponga que para esta edad y en las condiciones descritas, la probabilidad de enfermar de difteria es 0.1, la probabilidad de enfermar escarlatina es 0.15 y la probabilidad de enfermar de ambas enfermedades es 0.05.
¿Cuál será la probabilidad de que este niño:

a) tenga difteria dado que presenta al menos una de las enfermedades?
b) enferme de escarlatina dado que no se enferma de difteria?
c) enferme de al menos una de ellas dado que se enferma de difteria?
d) no se enferme de escarlatina dado que no se enferma de difteria?

Problema 3

Hay tres cajas A, B y C con 20 frascos de remedios cada una, de los cuales 20, 15 y 10 frascos son para la diabetes respectivamente. La probabilidad de elegir la caja A es igual a la de elegir la caja B y la probabilidad de elegir la caja C es igual a la suma de esas dos probabilidades anteriores.

a) Eligiendo una caja se extraen con reemplazo dos frascos ¿Cuál es la probabilidad de que los dos frascos elegidos sean para la diabetes?
b) Si los dos frascos elegidos con reemplazo son para la diabetes ¿Cuál es la probabilidad de que provengan de la caja C?

Problema 4

Estamos interesados en saber cuál de dos análisis A y B es mejor para el diagnóstico de una determinada enfermedad, de la cual sabemos que la presenta un 10 % de individuos de la población. El porcentaje de resultados falsos positivos del análisis A es del 15% y el de B es del 22%. El porcentaje de falsos negativos de A es del 7% y el de B es del 3%

a) ¿Cuál es la probabilidad de acertar en el diagnóstico con cada análisis?
b) ¿Qué análisis usaría usted y por qué?.

Problema 5

Una prueba diagnóstica para el cáncer uterino tiene una proporción de falsos positivos de 0.05 y de falsos negativos de 0.10. Una mujer con una probabilidad de 0.15 de padecer la enfermedad tiene un resultado negativo en la prueba.

a) ¿Cuál será la probabilidad de que no esté enferma?
b) Si el resultado es positivo en la prueba ¿Cuál será la probabilidad de esté realmente enferma?

Solución

Problema 1

Sean A y B sucesos tales que: $P(A)=\frac{1}{6}$; $P(B)=\frac{1}{5}$; $P(A\cup B)=\frac{1}{3}$

a) $P_B(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$, conocemos $P(B)$, debemos conocer $P(A\cap B)$, para esto utilizamos los datos dados

$$\underbrace{P(A\cup B)}_{1/3}=\underbrace{P(A)}_{1/6}+\underbrace{P(B)}_{1/5}-P(A\cap B)$$

$$P(A\cap B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{5}-\frac{1}{3}=\frac{1}{30}$$

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1/30}{1/5}=\frac{1}{6}$$

b) Utilizando propiedades de conjuntos y probabilidades

$$P_B(A\cap B^C)=\frac{P((A\cap B^C)\cap B)}{P(B)}=\frac{P\left(A\cap\underbrace{\left(B^C\cap B\right)}_{\phi}\right)}{P(B)}=\frac{P(\phi)}{P(B)}=\frac{0}{\frac{1}{5}}=0$$

c) $P_{B^C}(A)\ \dfrac{P(A\cap B^C)}{P(B^c)}=\dfrac{P(A)-P(A\cap B)}{1-P(B)}=\dfrac{\frac{1}{6}-\frac{1}{30}}{\frac{4}{5}}=\dfrac{\frac{4}{30}}{\frac{4}{5}}=\dfrac{1}{6}$

d) $P_{A\cup B}(A)=\dfrac{P((A\cup B)\cap A)}{P(A\cup B)}=\dfrac{P(A)}{P(A\cup B)}=\dfrac{1/6}{1/3}=\dfrac{1}{2}$

e) Dos sucesos A y B son independientes si $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

$$\underbrace{P(A\cap B)}_{\frac{1}{30}}=\underbrace{P(A)}_{\frac{1}{6}}\cdot\underbrace{P(B)}_{\frac{1}{5}}$$

$\dfrac{1}{30}=\dfrac{1}{30}$. Luego los sucesos son independientes

Problema 2

Sean los sucesos

A:"Enferma de difteria" $P(A)=0{,}1$¸ B:" Enferma de escarlatina" $P(B)=0{,}15$

$A\cap B$:"presta ambas enfermedades", $P(A\cap B)=0{,}05$

a) La probabilidad tenga difteria dado que presenta al menos una de las enfermedades, la podemos expresar como $P_{A\cup B}(A)$

$$P_{A\cup B}(A)=\frac{P(A\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)}{P(A\cup B)}=\frac{0{,}1}{0{,}2}=0{,}5$$

b) La probabilidad que enferme de escarlatina dado que no se enferma de difteria, la podemos expresar como $P_{A^C}(B)$

$$P_{A^C}(B)=\frac{P(A^C\cap B)}{P(A^C)}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{1-P(A)}=\frac{0{,}15-0{,}05}{0{,}9}=\frac{0{,}1}{0{,}9}=0{,}1111$$

c) La probabilidad que enferme de al menos una de ellas dado que se enferma de difteria, la podemos expresar como $P_A(A\cup B)$

$$P_A(A\cup B)=\frac{P\left(\underbrace{A\cap(A\cup B)}_{A}\right)}{P(A)}=\frac{P(A)}{P(A)}=1$$

d) La probabilidad que no se enferme de escarlatina dado que no se enferma de difteria, la podemos expresar como $P_{A^C}(B^C)$

$$P_{A^C}(B^C)=\frac{P\left(A^C\cap B^C\right)}{P\left(A^C\right)}=\frac{P\left((A\cup B)^C\right)}{1-P(A)}=\frac{1-P(A\cup B)}{1-P(A)}=\frac{0,8}{0,9}=0,8889$$

Problema 3

Tenemos tres cajas con 20 frascos cada una (Cada caja representa una subpoblación) en cada una de ellas hay frascos de remedio para la diabetes.

Los sucesos

A:"La caja elegida es la A

B: "La caja elegida es la B"

C:" La caja elegida es C"

Di:" El frasco i contiene remedio para la diabetes". i= 1, 2

Como $A\cup B\cup C=\Omega$ A, B y C son mutuamente excluyentes entonces

$$P(A)+P(B)+P(C)=1$$

$$P(A)=P(B),P(C)=2P(A),\ \ P(A)+P(A)+2P(A)=1\Rightarrow P(A)=\frac{1}{4}=P(B)$$

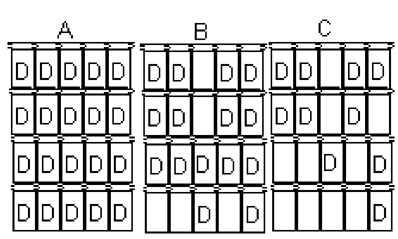
$$P(C)=\frac{1}{2}$$

a) $P(D_1\cap D_2)=P(A)P_A(D_1\cap D_2)+P(B)P_B(D_1\cap D_2)+P(C)P_C(D_1\cap D_2)$

Nota:

Como cada frasco se devuelve a la caja los sucesos son independientes luego

$P_A(D_1\cap D_2)=P_A(D_1)P_A(D_2);P_B(D_1\cap D_2)=P_B(D_1)P_B(D_2);P_C(D_1\cap D_2)=P_C(D_1)P_C(D_2)$



$$P(D_1\cap D_2)=\underbrace{P(A)}_{1/4}\underbrace{P_A(D_1)}_{20/20}\underbrace{P_A(D_2)}_{20/20}+\underbrace{P(B)}_{1/4}\underbrace{P_B(D_1)}_{15/20}\underbrace{P_B(D_2)}_{15/20}+\underbrace{P(C)}_{1/2}\underbrace{P_C(D_1)}_{10/20}\underbrace{P_C(D_2)}_{10/20}=0,5156$$

Es la probabilidad que los dos frascos elegidos sean para la diabetes

b) $P_{D_1\cap D_2}(C)=\dfrac{P(C)P_C(D_1)P_C(D_2)}{P(D_1\cap D_2)}=\dfrac{0,125}{0,5156}=0,2424$

Problema 4

Sea el suceso E "Tener la determinada enfermedad" ; $P(E)=0,1\Rightarrow P\left(E^C\right)=0,9$

Para el análisis: A

$P\left(T^+/E^C\right)=0,15;\quad P\left(T^-/E\right)=0,07$

Para el análisis: B

$P\left(T^+/E^C\right)=0,22\ \ P\left(T^-/E\right)=0,03$

a) Para el análisis: A

Luego

$$P\left(E/T^{+}\right)=\frac{P\left(E\right)P\left(T^{+}/E\right)}{P\left(E\right)P\left(T^{+}/E\right)+P\left(E^{C}\right)P\left(T^{+}/E^{C}\right)}=\frac{0,1\cdot 0,93}{0,1\cdot 0,93+0,9\cdot 0,15}=0,4079$$

Luego la probabilidad de acertar en el diagnóstico por él análisis A es 0.4079

Para el análisis: B

$$P\left(E/T^{+}\right)=\frac{P\left(E\right)P\left(T^{+}/E\right)}{P\left(E\right)P\left(T^{+}/E\right)+P\left(E^{C}\right)P\left(T^{+}/E^{C}\right)}=\frac{0,1\cdot 0,97}{0,1\cdot 0,97+0,9\cdot 0,15}=\frac{0,097}{0,232}0,4181$$

Luego la probabilidad de acertar en el diagnóstico por él análisis B es 0.4181

b) El análisis B , por que presenta mayor probabilidad de acertar.

Problema 5

$P\left(T^{+}/E^{C}\right)=0,05;\quad P\left(T^{-}/E\right)=0,10,\quad P\left(E\right)=0,15$

a) $$P\left(E^{C}/T^{-}\right)=\frac{P\left(E^{C}\right)\underbrace{P\left(T^{-}/E^{C}\right)}_{1-P\left(T^{+}/\bar{E}\right)}}{P\left(E^{C}\right)P\left(T^{-}/E^{C}\right)+P\left(E\right)P\left(T^{-}/E\right)}=\frac{0,85\cdot 0,95}{0,85\cdot 0,95+0,15\cdot 0,10}=0,9818$$

Es la probabilidad de que no esté enferma

b) $$P\left(E/T^{+}\right)=\frac{P\left(E\right)P\left(T^{+}/E\right)}{P\left(E\right)P\left(T^{+}/E\right)+P\left(E^{C}\right)P\left(T^{+}/E^{C}\right)}=\frac{0,5278\cdot 0,9}{0,5278\cdot 0,9+0,4722\cdot 0,05}=0,7606$$

Si el resultado es positivo en la prueba la probabilidad de esté realmente enferma es 0,7606