5.2 PRUEBAS DE HIPÓTESIS PARAMÉTRICAS

CONTENIDOS:

5.2.1. Prueba de hipótesis para una media.
5.2.2 Prueba de hipótesis para una proporción.
5.2.3 Prueba de hipótesis para la varianza.
5.2.4 Prueba de hipótesis para una diferencia de medias.
5.2.5 Prueba de hipótesis para una diferencia de proporciones.
5.2.6 Prueba de hipótesis para el cuociente de varianzas.

OBJETIVOS:

- Plantear hipótesis para diferentes parámetros.
- Determinar los pasos a seguir al realizar una prueba de hipótesis para diferentes parámetros.
- Interpretar el nivel de significación de una prueba de hipótesis.
- Redactar una conclusión con los resultados obtenidos de una prueba de hipótesis.
- Realizar pruebas de hipótesis en problemas prácticos

5.2.1 PRUEBA DE HIPÓTESIS PARA UNA MEDIA.

CONCEPTOS CLAVES: Parámetro. Estimador. Hipótesis. Estadístico de prueba. Nivel de significación. Región de rechazo. Conclusión.

RESUMEN DE CONCEPTOS Y PROPIEDADES:

Sea $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ_0 un valor de prueba conocido y sea $\bar{X}$ y S_X estimadores de μ y σ con una muestra de tamaño *n*.

Pasos a seguir al realizar una prueba de hipótesis:

P1: Plantear hipótesis.

Hipótesis nula $H_0 : \mu = \mu_0$ v/s Hipótesis alternativa $H_1 : \mu \neq \mu_0$; $H_2 : \mu > \mu_0$; $H_3 : \mu < \mu_0$

P2: Estadístico de prueba: $t_0 = \left(\dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S_X} \right) \sqrt{n} \sim t(n-1)$

P3: Establecer un nivel de significación: $\alpha = P(\text{Re}\,chazar\ H_0 / H_0\ es\ verdadero)$

P4: Región de rechazo de H_0

Para $H_0\ v/s\ H_1 \Rightarrow R_1 = \left\{ x / x < -t_{(1-\frac{\alpha}{2}, n-1)} \ o\ x > t_{(1-\frac{\alpha}{2}, n-1)} \right\}$

Para $H_0\ v/s\ H_2 \Rightarrow R_2 = \left\{ x / x > t_{(1-\alpha, n-1)} \right\}$

Para $H_0\ v/s\ H_3 \Rightarrow R_3 = \left\{ x / x < -t_{(1-\alpha, n-1)} \right\}$

P5: Decisión: Si $t_0 \in R_i \Rightarrow$ se rechaza H_0 al nivel de significación α

EJERCICIO RESUELTO, PASO A PASO:

Ejercicio 1: (Aplicación en Ciencias de la salud)

Para analizar el crecimiento de ratas de laboratorio se eligen 13 ratas y se miden obteniendo una talla promedio de la muestra de 5.3 centímetros y una varianza muestral de 19.3

Pregunta: Un investigador afirma que la talla promedio de las ratas en la población es mayor a 4.5 centímetros. Verifique tal afirmación realizando la prueba de hipótesis adecuada con un nivel de significación de 0.01

Esquema de solución

Paso 1: Leer cuidadosamente el enunciado del problema.

Paso 2: Identificar la variable en estudio y los parámetros involucrados.

Sea X = Talla de las ratas (en centímetros). En este caso se debe suponer que $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ y los parámetro involucrados son μ y σ^2 donde μ es la talla promedio de las ratas en la población y σ es la desviación estándar de la talla de las ratas.

Paso 3: Estimar los parámetros. En este caso se tiene, del enunciado del problema, que

$\overline{X} = 5.3$ es un estimador de μ y $S_x^2 = 19.2$ es un estimador de σ^2

Paso 4: Leer la pregunta 1 y revisar cual de los conceptos se debe usar para obtener lo pedido. Para responder la pregunta se debe realizar una prueba de hipótesis para la media poblacional, donde la hipótesis alternativa debe ser $H_2 : \mu > \mu_0$ donde $\mu_0 = 4.5$.

Paso 5: Realizar la prueba siguiendo los seis pasos.

P1: Plantear hipótesis.

Hipótesis nula $H_0 : \mu = 4.5$ v/s Hipótesis alternativa $H_2 : \mu > 4.5$

P2: Estadístico de prueba; $t_0 = \left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{S_X} \right) \sqrt{n} = \left(\frac{5.3 - 4.5}{\sqrt{19.6}} \right) \sqrt{13} = 0.6583$

P3: Nivel significación; $\alpha = 0.01$

P4: Región de rechazo de $H_0 \ v/s \ H_2$

$$R_2 = \left\{ x / \ x > t_{(1-\alpha, n-1)} \right\} = \left\{ x / \ x > t_{(0.99,12)} \right\} = \left\{ x / \ x > 2.68 \right\}$$

P5: Decisión. Como $t_0 = 0.6583 < 2.68 \Rightarrow t_0 \notin R_2 \Rightarrow$ No se rechaza H_0 al nivel de significación 0.01

P6: Conclusión. Con 99% de confianza la talla media de las ratas no es mayor que 4.5 centímetros, por lo tanto la afirmación del investigador no es correcta.

EJERCICIOS PROPUESTOS:

1. (**Aplicación en Ciencias de la Salud**) Con el propósito de verificar la efectividad de un tratamiento basado en ejercicios para el aumento de la talla en niños de 10 años (en cms.), se realizó un experimento aplicando el tratamiento a 13 niños y considerando 16 como controles, el que arrojó los siguientes resultados:

   TRATADOS $\quad n = 13\ ,\ \overline{X} = 138.6\ ,\ S_X^2 = 29.16$

   CONTROLES $\quad m = 16\ ,\ \overline{Y} = 125.8\ ,\ S_Y^2 = 20.7$

   i) Pruebe la hipótesis de que la talla promedio de los niños tratados en la población es de 145 centímetros. Use un nivel de significación de 0.05
   ii) Pruebe la hipótesis de que la talla promedio de los niños controles en la población es menor que 140 centímetros, si desea una confianza de 95% en su conclusión.
   iii) Si en la población la talla promedio habitual de los niños es de 130 centímetros. Verifique, realizando la prueba de hipótesis adecuada, si los ejercicios son un buen tratamiento para que los niños aumenten su talla promedio habitual. Use un nivel de significación de 0.01

2. (**Aplicación en Ciencias de la Salud**) Los siguientes datos representan el aumento de peso (en Kilos.) de niños mediante dos dietas alternativas en la región de Antofagasta:

Dieta 1	0.98	0.62	0.53	0.76	0.43	0.36	0.51	0.24	0.24
Dieta 2	0.40	0.14	0.16	0.21	0.09	0.02	0.02	0.01	

   a) Pruebe la hipótesis de que en la población de niños a los que se les aplica la dieta 1, el aumento de peso promedio es de 0.80 kilos, usando un nivel de significación de 0.01.
   b) Pruebe la hipótesis de que en la población de niños a los que se les aplica la dieta 2, el aumento de peso promedio es menor que 0.30 kilos, usando un nivel de significación de 0.05.

5.2.2 PRUEBA DE HIPÓTESIS PARA UNA PROPORCIÓN.

CONCEPTOS CLAVES: Parámetro. Estimador. Estadístico de prueba. Nivel de significación. Región de rechazo. Conclusión.

RESUMEN DE CONCEPTOS Y PROPIEDADES:

Si A es una característica de interés y se desea realizar hipótesis respecto a la probabilidad de A denotada como $p = P(A)$, entonces mediante una muestra de tamaño n se estima p como $\hat{p} = \frac{a}{n}$ donde a es el número de elementos de la muestra con la característica A. Sea p_0 un valor de prueba para p conocido

Para realizar la prueba de hipótesis se deben seguir los siguientes pasos:

P1: Plantear hipótesis.

Hipótesis nula $H_0 : p = p_0$ v/s Hipótesis alternativa $H_1 : p \neq p_0$; $H_2 : p > p_0$; $H_3 : p < p_0$

P2: Estadístico de prueba: $z_0 = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} \sim N(0,1)$

P3: Establecer un nivel de significación: $\alpha = P(\text{Re}chazar\ H_0 / H_0\ es\ verdadero)$

P4: Región de rechazo de H_0

Para $H_0\ v/s\ H_1 \Rightarrow R_1 = \left\{ x / x < -z_{(1-\frac{\alpha}{2})}\ o\ x > z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \right\}$

Para $H_0\ v/s\ H_2 \Rightarrow R_2 = \left\{ x / x > z_{(1-\alpha)} \right\}$

Para $H_0\ v/s\ H_3 \Rightarrow R_3 = \left\{ x / x < -z_{(1-\alpha)} \right\}$

P5: Decisión: Si $t_0 \in R_i \Rightarrow$ se rechaza H_0 al nivel de significación α

P6: Conclusión: Se debe interpretar la decisión tomada en Paso 5.

EJERCICIO RESUELTO, PASO A PASO:

EJERCICIO 2: (APLICACIÓN EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA)

En una fábrica de artículos electrónicos generalmente el 10% de los artículos presenta algún defecto de fabricación. Para mejorar la calidad del producto se toman medidas para disminuir el porcentaje de artículos defectuosos. Luego de aplicadas las medidas se elige una muestra de 1500 artículos y se prueban observando que 100 de ellos presentaban algún defecto.

Pregunta: ¿Cree usted que las medidas de mejoramiento aplicadas lograron disminuir la proporción de artículos defectuosos en la fábrica? Realice la prueba de hipótesis adecuada para responder esta pregunta usando un nivel de significación de 0.05

Esquema de solución

Paso 1: Leer cuidadosamente el enunciado del problema.

Paso 2: Identificar la característica de interés y los parámetros involucrados.

Sea A = {Artículos electrónicos de la fábrica con algún defecto}. En este caso el parámetro de interés es $p = P(A)$ = proporción de artículos defectuosos en la fábrica.

Paso 3: Estimar los parámetros.

En la muestra de n = 1500 artículos electrónicos se tiene que a = 100 tienen algún defecto, luego $\widehat{p} = \frac{100}{1500} = 0.0667$ es la proporción de artículos defectuosos en la muestra.

Paso 4: Leer la pregunta y revisar cual de los conceptos se debe usar para obtener lo pedido.

Para responder la pregunta se debe realizar una prueba de hipótesis para una proporción poblacional, donde la hipótesis alternativa debe ser $H_3 : p < p_0$ donde $p_0 = 0.1$ pues se pide verificar si con las medidas aplicadas la proporción de artículos defectuosos ha disminuido respecto al valor habitual

Paso 5: Realizar la prueba siguiendo los seis pasos.

P1: Plantear hipótesis.
Hipótesis nula $H_0 : p = 0.1$ v/s Hipótesis alternativa $H_2 : p < 0.1$

P2: Estadístico de prueba; $z_0 = \dfrac{\widehat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \dfrac{0.0667 - 0.1}{\sqrt{\dfrac{0.1(0.9)}{1500}}} = -4.299$

P3: Nivel significación; $\alpha = 0.05$

P4: Región de rechazo de $H_0 \ v/s \ H_3$

$$R_3 = \left\{ x / x < -z_{(1-\alpha)} \right\} = \left\{ x / x < -z_{(0.95)} \right\} = \left\{ x / x < -1.645 \right\}$$

P5: Decisión. Como $z_0 = -4.299 < -1.645 \Rightarrow t_0 \in R_3 \Rightarrow$ Se rechaza H_0 al nivel de significación 0.05

P6: Conclusión. Con 95% de confianza la proporción de artículos defectuosos en la fábrica es menor que 0.1, por lo tanto se logra disminuir la proporción de artículos defectuosos en la fábrica con las medidas aplicadas.

EJERCICIOS PROPUESTOS:

1. (**Aplicación en Ciencias de la Salud**)

   Con el propósito de verificar la efectividad de un tratamiento basado en ejercicios para bajar de peso en niños con obesidad, se realizó un experimento aplicando el tratamiento a 300 niños con obesidad. Después de un tiempo se observó que 100 de ellos bajaron de peso.

   Pruebe la hipótesis de que la proporción de niños que bajan de peso con el tratamiento en la población es mayor a 0.20, si desea una confianza de 95% en la conclusión.

2. (**Aplicación en Ciencias del Mar**) Se desea comparar la efectividad de dos análisis de laboratorio para detectar la presencia de bacterias en equinodermos (erizo rojo), para ello se selecciona dos muestras independientes de Loxechinus albus (erizo rojo comestible) en un sector de caleta coloso y los resultados de los análisis fueron los siguientes:

Análisis	Detecta la Bacteria		Total
	Si	No	
1	11	39	50
2	8	42	50
Total	19	81	100

   a) Pruebe la hipótesis de que la proporción de efectividad en detectar la bacteria del análisis 1 en la población es menor a 0.30, con un nivel de significación de 0.05
   b) Pruebe la hipótesis de que la proporción de efectividad en detectar la bacteria del análisis 2 en la población es mayor a 0.10, usando un nivel de significación de 0.1

3. **(Aplicación en Ciencias del Mar)** La siguiente tabla muestra la distribución de una muestra aleatoria de 400 truchas cafés de un gran río., según la longitud y el sector donde fueron extraídas.

	SECTOR DEL RIO		
LONGITUD	Alto	Centro	Bajo
Bajo el promedio	67	64	25
Promedio	42	76	56
Sobre el promedio	10	23	37

   a) Pruebe la hipótesis de que la proporción de truchas de longitud bajo el promedio en el sector alto del río es mayor a 0.50, usando un nivel de significación de 0.05.
   b) Pruebe la hipótesis de que la proporción de truchas del sector alto del río cuya longitud está bajo el promedio es menor a 0.50, usando un nivel de significación de 0.01.

5.2.3 PRUEBA DE HIPÓTESIS PARA LA VARIANZA DE UNA POBLACIÓN NORMAL.

CONCEPTOS CLAVES: Parámetro. Estimador. Estadístico de prueba. Nivel de significación. Región de rechazo

RESUMEN DE CONCEPTOS Y PROPIEDADES:

Sea $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ_0^2 un valor de prueba conocido para σ^2 y sea S_X un estimador de σ obtenido de una muestra aleatoria de tamaño *n*.

Pasos a seguir al realizar la prueba de hipótesis:

P1: Plantear hipótesis.

Hipótesis nula $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ v/s Hipótesis alternativa $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$; $H_2 : \sigma^2 > \sigma_0^2$; $H_3 : \sigma^2 < \sigma_0^2$

P2: Estadístico de prueba: $J_0 = \dfrac{(n-1)S_X^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$

P3: Establecer un nivel de significación: $\alpha = P(\text{Re}\,chazar\ H_0 / H_0\ es\ verdadero)$

P4: Región de rechazo de H_0

Para $H_0\ v/s\ H_1 \Rightarrow R_1 = \left\{ x / x < \chi^2_{(\frac{\alpha}{2}, n-1)} \ \ o\ x > \chi^2_{(1-\frac{\alpha}{2}, n-1)} \right\}$

Para $H_0\ v/s\ H_2 \Rightarrow R_2 = \left\{ x / x > \chi^2_{(1-\alpha, n-1)} \right\}$

Para $H_0\ v/s\ H_3 \Rightarrow R_3 = \left\{ x / x < \chi^2_{(\alpha, n-1)} \right\}$

P5: Decisión: Si $J_0 \in R_i \Rightarrow$ se rechaza H_0 al nivel de significación α

P6: Conclusión: Se debe interpretar la decisión tomada en Paso 5.

EJERCICIO RESUELTO, PASO A PASO:

EJERCICIO 3: (APLICACIÓN EN INGENIERÍA)

En un proceso de fabricación de tornillos, la máquina cortadora de los trozos de metal para su fabricación presenta en condiciones normales una varianza de la longitud de los cortes de 0.15. Para verificar si la máquina está trabajando en condiciones normales se toma una muestra de 10 trozos de metal cortados por esa máquina en la fábrica y se miden sus longitudes, obteniendo los siguientes resultados:

15.2 15.5 14.2 15.6 14.8 15.2 15.1 14.1 14.7 14.6

Pregunta: Realizando la prueba de hipótesis adecuada, verifique si la máquina está trabajando en condiciones normales. Use un nivel de significación de 0.05.

Esquema de solución

Paso 1: Leer cuidadosamente el enunciado del problema.

Paso 2: Identificar la variable en estudio y el parámetro de interés.

Sea X = longitud de los trozos de metal. En este caso se puede suponer que $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ donde el parámetro involucrado es σ^2 donde σ es la desviación estándar de la longitud de los trozos de metal.

Paso 3: Estimar el parámetro.

Se ingresan los datos a la calculadora fx – 350 MS o similar de la siguiente manera:

- Poner la calculadora en el modo SD
- Limpiar la memoria: SHIFT MODE 1 =
- Ingresar los datos de la siguiente manera:
  15.2 M+ 15.5M+ ……14.6 M+
- Obtener resultados SHIFT 2 3 = $S_X = 0.5099$ estima a σ

Paso 4: Leer la pregunta y revisar cual de los conceptos se debe usar para obtener lo pedido.

Para responder la pregunta se debe realizar una prueba de hipótesis para la varianza poblacional, donde la hipótesis alternativa debe ser $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ donde $\sigma_0^2 = 0.15$. Ya que se desea probar si la varianza la longitud de los cortes hechos por la máquina se mantiene en condiciones normales

Paso 5: Realizar la prueba siguiendo los seis pasos.

P1: Plantear hipótesis.
Hipótesis nula $H_0 : \sigma^2 = 0.15$ v/s Hipótesis alternativa $H_1 : \sigma^2 \neq 0.15$

P2: Estadístico de prueba; $J_0 = \dfrac{(n-1)S_X^2}{\sigma_0^2} = \dfrac{9(0.5099)^2}{0.15} = 15.6$

P3: Nivel significación; $\alpha = 0.05$

P4: Región de rechazo de $H_0 \ v/s \ H_1$

$$R_1 = \left\{ x / \ x < \chi^2_{(\frac{\alpha}{2}, n-1)} \ \ o \ x > \chi^2_{(1-\frac{\alpha}{2}, n-1)} \right\} = \left\{ x / \ x < \chi^2_{(0.025,9)} \ \ o \ x > \chi^2_{(0.975,9)} \right\}$$

$$= \left\{ x / \ x < 2.70 \ o \ x > 19.0 \right\}$$

P5: Decisión. Como $J_0 = 15.6 > 2.70 \ y \ J_0 = 15.6 < 19.0 \Rightarrow J_0 \notin R_1 \Rightarrow$ No se rechaza H_0 al nivel de significación 0.01

P6: Conclusión. Con 95% de confianza la varianza de la longitud de los cortes no es diferente que 0.15 centímetros, por lo tanto la máquina está funcionando en condiciones normales

EJERCICIOS PROPUESTOS:

1. (**Aplicación en Ciencias de la Salud**) En condiciones normales la varianza de la talla en niños de 10 años (en cms.) es de 25 cm^2, para verificar si la variabilidad de la talla de los niños se mantiene en condiciones normales se seleccionan 13 niños de colegios municipalizados y 16 niños de colegios privados y de sus tallas se obtiene la siguiente información:

   Colegios Municipalizados: $n = 13$, $S_X^2 = 29.16$

   Colegios Privados : $m = 16$, $S_Y^2 = 20.7$

   i. Verifique, realzando la prueba de hipótesis adecuada, si la varianza de la talla de los niños de colegios municipalizados no cambia respecto al valor de la varianza en condiciones normales. Use un nivel de significación de 0.01
   ii. Verifique, realizando la prueba de hipótesis adecuada, si la varianza de la talla de los niños de colegios privados es inferior al valor de la varianza en condiciones normales. Use un nivel de significación de 0.05

2. (**Aplicación en Ciencias del mar**) Los siguientes datos representan el crecimiento (en cms.) de Protothaca Thaca (almeja común)en dos sectores costeros de la región de Antofagasta:

Bolsico	0.98	0.62	0.53	0.76	0.43	0.36	0.51	0.24	0.24
Coloso	0.40	0.14	0.16	0.21	0.09	0.02	0.02	0.01	

   a) Pruebe la hipótesis que la varianza del crecimiento en Coloso es menor que 0.05, usando un nivel de significación de 0.01.
   b) Pruebe la hipótesis que la varianza del crecimiento en Bolsico es mayor que 0.03, usando un nivel de significación de 0.05.

3. (**Aplicación en Ciencias del mar**) Se desea analizar la variabilidad de la cantidad de una hormona llamada ecdisona que se obtiene a partir de una conversión química del colesterol que presentan los crustáceos. Esta hormona es la encargada de llevar acabo el proceso de ecdisis o muda en los crustáceos. Para el estudio se utilizó una jaibita de la especie Cyclograpsus cinereus. Se eligieron 15 jaibitas del sector La Rinconada obteniendo una cantidad media de hormona de 98 ml. y una desviación estándar de 37 ml. y 10 jaibitas del sector Hornitos obteniendo una cantidad media de hormona de 90 ml. y una desviación estándar de 47 ml.

   a) Pruebe la hipótesis que la varianza de la cantidad de hormona de las jaibitas de Hornito es mayor que 2000, usando un nivel de significación de 0.01.
   b) Pruebe la hipótesis que la varianza de la cantidad de hormona de las jaibitas de La Rinconada es igual a 1500, usando un nivel de significación de 0.05.

5.2.4 PRUEBA DE HIPÓTESIS PARA LA DIFERENCIA DE MEDIAS.

CONCEPTOS CLAVES: Parámetro. Estimador. Estadístico de prueba. Nivel de significación. Región de rechazo

RESUMEN DE CONCEPTOS Y PROPIEDADES:

1. Sea $X \sim N(\mu_1,\sigma^2)$; $Y \sim N(\mu_2,\sigma^2)$ dos poblaciones independientes.
2. En dos muestra de tamaños *n* y *m* de X e Y respectivamente se obtiene $\overline{X}, \overline{Y}, S_X$ y S_Y.
3. Estimador de la varianza común: $\hat{\sigma}^2 = S_C^2 = \dfrac{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}{n+m-2}$

Pasos a seguir al realizar la prueba de hipótesis:

P1: Plantear hipótesis.

Hipótesis nula $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$ v/s

Hipótesis alternativa $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$; $H_2 : \mu_1 - \mu_2 > 0$; $H_3 : \mu_1 - \mu_2 < 0$

P2: Estadístico de prueba: $t_0 = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{S_C^2\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m}\right)}} \sim t_{(n-1)}$

P3: Establecer un nivel de significación: $\alpha = P(\text{Rechazar } H_0 / H_0 \text{ es verdadero})$

P4: Región de rechazo de H_0

Para $H_0 \ v/s \ H_1 \Rightarrow R_1 = \left\{ x / x < -t_{(1-\frac{\alpha}{2}, n+m-2)} \ o \ x > t_{(1-\frac{\alpha}{2}, n+m-2)} \right\}$

Para $H_0 \ v/s \ H_2 \Rightarrow R_2 = \left\{ x / x > t_{(1-\alpha, n+m-2)} \right\}$

Para $H_0 \ v/s \ H_3 \Rightarrow R_3 = \left\{ x / x < -t_{(1-\alpha, n+m-2)} \right\}$

P5: Decisión: Si $t_0 \in R_i \Rightarrow$ se rechaza H_0 al nivel de significación α

P6: Conclusión: Se debe interpretar la decisión tomada en Paso 5.

EJERCICIO RESUELTO, PASO A PASO:

Ejercicio 4: (Aplicación en Ciencias de la salud)

Se desea analizar el contenido de vitamina A en la sangre en trabajadores a nivel del mar y en altura obteniendo los siguientes datos:

Nivel del mar: 25.2 30.4 46.9 51 46.4 48.5 39.3 55.9 34.3 31.2 40.7 29.8 35.7 40.1

En altura : 43.7 62.6 61.6 74.8 36.8 68.6 69.3 67 44 49 56.8 48.4 42.4 47.1

Pregunta: Pruebe la hipótesis que el trabajo en altura hace aumentar el contenido medio de vitamina A en la sangre usando un nivel de significación de 0.05.

Esquema de solución

Paso 1: Leer cuidadosamente el enunciado del problema.

Paso 2: Identificar la variable en estudio y los parámetros involucrados.

Sea X = contenido de vitamina A en la sangre de trabajadores a nivel del mar.

Y = contenido de vitamina A en la sangre de trabajadores en altura.

Suponer que $X \sim N(\mu_1,\sigma^2)$; $Y \sim N(\mu_2,\sigma^2)$ y son independientes.

Paso 3: Estimar los parámetros.

Se ingresan los datos a la calculadora fx – 350 MS (o similar) de igual manera que en el ejercicio 3 y obtener**:**

$\overline{X} = 39.6714 \quad y \quad S_X = 0.5099$

$\overline{Y} = 55.15 \quad y \quad S_Y = 12.1224$

Estimador de la varianza común: $\widehat{\sigma}^2 = S_C^2 = \dfrac{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}{n+m-2} = 114.9294$

Paso 4: Leer la pregunta y revisar cual de los conceptos se debe usar para obtener lo pedido.

Para responder la pregunta se debe realizar una prueba de hipótesis para la diferencia de medias poblacionales, donde la hipótesis alternativa debe ser $H_3 : \mu_1 - \mu_2 < 0,$ ya que se desea probar si el contenido medio de vitamina A en la sangre es mayor en trabajadores en altura

Paso 5: Realizar la prueba siguiendo los seis pasos.

P1: Plantear hipótesis.

Hipótesis nula $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$ v/s Hipótesis alternativa $H_3 : \mu_1 - \mu_2 < 0$

P2: Estadístico de prueba: $t_0 = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{S_C^2\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m}\right)}} = \dfrac{39.6714 - 55.15}{\sqrt{114.9294\left(\dfrac{1}{14} + \dfrac{1}{14}\right)}} = -3.82$

P3: Establecer un nivel de significación: $\alpha = P(\text{Re}\,chazar\ H_0 / H_0\ es\ verdadero)$

P4: Región de rechazo de H_0

En este caso $\alpha = 0.05 \Rightarrow 1 - \alpha = 0.95$

Luego en la tabla t de Student se obtiene $t_{(1-\alpha, n+m-2)} = t_{(0.95,26)} = 1.71$

Luego para $H_0\ v/s\ H_3 \Rightarrow R_3 = \left\{ x / x < -t_{(0.95,26)} \right\} = \left\{ x / x < -1.71 \right\}$

P5: Decisión: Como $t_0 = -3.82 < -1.71 \Rightarrow t_0 \in R_3 \Rightarrow$ se rechaza H_0 al nivel de significación 0.05

P6: Conclusión: Con 95% de confianza el contenido medio de vitamina A en la sangre de trabajadores en altura es mayor que el contenido medio de vitamina A en la sangre de trabajadores a nivel del mar..

Paso 6: Redactar una respuesta a la pregunta:

Con 95% de confianza el trabajo en altura hace aumentar el contenido medio de vitamina A en la sangre.

EJERCICIOS PROPUESTOS:

1. (**Aplicación en Ciencias de la Ingeniería**) Los siguientes datos corresponden a la pureza del ácido en porcentaje observada en dos plantas de producción de ácido sulfúrico.

   Planta A 96.8 95.8 96.2 96.5 96.4 96.7 96.3 96 97.1 96.5
   Planta B 95.6 96 97.8 98.4 97.6 98.2 96.9 96.8

   Pruebe la hipótesis si existe alguna diferencia en los porcentajes promedios de pureza del ácido entre la planta A y la planta B, si desea un nivel de significación de 0.01

2. (**Aplicación en Ciencias del mar**) Los siguientes datos representan el crecimiento (en cms.) de Protothaca Thaca (Almejas) en dos sectores costeros de la región de Antofagasta:

Bolsico	0.98	0.62	0.53	0.76	0.43	0.36	0.51	0.24	0.24
Coloso	0.40	0.14	0.16	0.21	0.09	0.02	0.02	0.01	

   Pruebe la hipótesis de que el crecimiento promedio en Bolsico es mayor que en Coloso usando un nivel de significación de 0.05

3. (**Aplicación en Ciencias de la Salud**) Se tomaron dos muestras de presión sistólica (en mm Hg.) a sujetos normales y sujetos hospitalizados, obteniendo los siguientes datos:

   Normales (X) : 146 142 135 140 154 163 138 168
   Hospitalizados (Y) : 164 176 165 172 169 171

   Pruebe la hipótesis de que la presión sistólica promedio de los sujetos hospitalizados es mayor que la de los sujetos normales, usando un nivel de significación de 0.05

5.2.5 PRUEBA DE HIPÓTESIS PARA LA DIFERENCIA DE PROPORCIONES.

CONCEPTOS CLAVES: Parámetros. Estimadores. Estadístico de prueba. Nivel de significación. Región de rechazo**.**

RESUMEN DE CONCEPTOS Y PROPIEDADES:

Si A es una característica de interés y se desea realizar pruebas de hipótesis respecto a la probabilidad de A en dos poblaciones independientes Pob 1 y Pob 2 denotadas como $p_1 = P(A / Pob\,1)$ y $p_2 = P(A / Pob\,2)$, Mediante una muestra de tamaño n de la población 1 se estima p_1 como $\hat{p}_1 = \frac{a_1}{n}$ donde a_1 es el número de elementos de la muestra de la población 1 con la característica A.

Mediante una muestra de tamaño m de la población 2 se estima p_2 como $\hat{p}_2 = \frac{a_2}{m}$ donde a_2 es el número de elementos de la muestra de la población 2 con la característica A.

Luego si consideramos $p_1 = p_2 = p$ entonces $\hat{p} = \frac{a_1 + a_2}{n + m}$

Pasos a seguir al realizar la prueba de hipótesis:

P1: Plantear hipótesis.

Hipótesis nula $H_0 : p_1 - p_2 = 0$ v/s

Hipótesis alternativa $H_1 : p_1 - p_2 \neq 0$; $H_2 : p_1 - p_2 > 0$; $H_3 : p_1 - p_2 < 0$

P2: Estadístico de prueba: $z_0 = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}} \sim N(0,1)$

P3: Establecer un nivel de significación: $\alpha = P(\text{Re}chazar\ H_0 / H_0\ es\ verdadero)$

P4: Región de rechazo de H_0

Para $H_0\ v/s\ H_1 \Rightarrow R_1 = \left\{ x / x < -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\ o\ x > z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\}$

Para $H_0\ v/s\ H_2 \Rightarrow R_2 = \{ x / x > z_{1-\alpha} \}$

Para $H_0\ v/s\ H_3 \Rightarrow R_3 = \{ x / x < -z_{1-\alpha} \}$

P5: Decisión: Si $z_0 \in R_i \Rightarrow$ se rechaza H_0 al nivel de significación α

P6: Conclusión: Se debe interpretar la decisión tomada en Paso 5

EJERCICIO RESUELTO, PASO A PASO:

EJERCICIO 5: (APLICACIÓN EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA)

En un estudio para investigar la calidad de los artículos producidos por dos máquinas, se elige una muestra de 50 artículos producidos por la máquina A y se observa que 11 están defectuosos y en una muestra de 50 artículos producidos por la máquina B se encuentran 8 defectuosos.

Pregunta: Pruebe la hipótesis de que la proporción de artículos defectuosos producidos por la máquina A es mayor que los producidos por la máquina B, usando un nivel de significación de 0.05.

Esquema de solución

Paso 1: Leer cuidadosamente el enunciado del problema.

Paso 2: Identificar la característica de interés y los parámetros involucrados.

Sean $C = \{Artículos\ defectuosos\}$.

$Pob\,1 = \{Artículos\ producidos\ por\ máquina\ A\}$ **y** $Pob\,2 = \{Artículos\ producidos\ por\ máquina\ B\}$

Parámetros de interés:

$p_1 = P(C / Pob\,1)$ = proporción de artículos defectuosos producidos por máquina A .

$p_2 = P(C / Pob\,2)$ = proporción de artículos defectuosos producidos por máquina B

Paso 3: Estimar los parámetros.

En la muestra de n = 50 artículos producidos por la máquina A se tiene que #C = 11, luego $\widehat{p}_1 = \frac{11}{50} = 0.22$ y en la muestra de m = 50 artículos producidos por la máquina B se tiene que #C = 8, luego $\widehat{p}_2 = \frac{8}{50} = 0.16$

Además $\widehat{p} = \frac{11+8}{50+50} = \frac{19}{100} = 0.19$

Paso 4: Leer la pregunta y revisar cual de los conceptos se debe usar para obtener lo pedido.

Para responder la pregunta se debe realizar una prueba de hipótesis para la diferencia de proporciones poblacionales, donde la hipótesis alternativa debe ser $H_2 : p_1 - p_2 > 0$, ya que se desea probar si la proporción de artículos defectuosos producidos es mayor en la máquina A que en la máquina B

Paso 5: Realizar la prueba siguiendo los seis pasos.

P1: Plantear hipótesis.

Hipótesis nula $H_0 : p_1 - p_2 = 0$ v/s Hipótesis alternativa $H_2 : p_1 - p_2 > 0$

P2: Estadístico de prueba: $z_0 = \dfrac{\widehat{p}_1 - \widehat{p}_2}{\sqrt{\widehat{p}(1-\widehat{p})\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}} = \dfrac{0.22-0.16}{\sqrt{0.19(0.81)\left(\frac{1}{50}+\frac{1}{50}\right)}} = 0.7647$

P3: Establecer un nivel de significación: $\alpha = P(\text{Re}\,chazar\ H_0 / H_0\ es\ verdadero) = 0.05$

P4: Región de rechazo de H_0

Como $\alpha = 0.05 \Rightarrow 1-\alpha = 0.95$ en la tabla normal se obtiene $z_{0.95} = 1.645$

Luego para $H_0\ v/s\ H_2 \Rightarrow R_2 = \{x / x > z_{0.95}\} = \{x / x > 1.645\}$

P5: Decisión: Como $z_0 = 0.7647 < 1.645 \Rightarrow z_0 \notin R_2 \Rightarrow$ No se rechaza H_0 al nivel de significación 0.05

P6: Conclusión: Con 95% de confianza la proporción de artículos defectuosos producidos por la máquina A no es mayor que los producidos por la máquina B

.

Paso 6: Redactar una respuesta a la pregunta:

Con 95% de confianza se puede afirmar que no hay diferencia en la proporción de artículos defectuosos producidos por las dos máquinas

EJERCICIOS PROPUESTOS:

1. (**Aplicación en Ciencias del Mar**) La siguiente tabla muestra la distribución de una muestra aleatoria de 400 truchas cafés de un gran río., según la longitud y el sector de donde fueron extraídas.

SECTOR DEL RIO

LONGITUD	Alto	Centro	Bajo
Bajo el promedio	67	64	25
En el Promedio	42	76	56
Sobre el promedio	10	23	37

   a) Pruebe la hipótesis de que la proporción de truchas de longitud bajo el promedio es mayor en el sector alto que en el sector bajo, usando un nivel de significación de 0.05
   b) Pruebe la hipótesis de que la proporción de truchas del sector Alto es mayor en aquellas cuya longitud está bajo el promedio que en aquellas cuya longitud está sobre el promedio, usando un nivel de significación de 0.01

2. (**Aplicación en Ingeniería**) Una empresa se provee de componentes electrónicos provenientes de dos fábricas. El interés del dueño está centrado en el tiempo de vida útil de tales componentes. Al recibir una gran partida de cada fábrica, decide inspeccionar una muestra aleatoria de cada partida, las cuales somete a experimentación con el propósito de recavar los tiempos de vida útil. Los resultados obtenidos se muestran en la siguiente tabla:

F A B R I C A

VIDA UTIL (en horas)	1	2	TOTAL
0 - 300	4	6	
300 - 500	12	16	
500 - 1000	23	19	
1000 - 1500	6	4	
TOTAL			

   a. ¿Podría afirmar que la proporción de componentes cuya vida útil es mayor que 500 horas es menor en la FABRICA 2 que en la FABRICA 1? Realice la prueba de hipótesis adecuada con un nivel de significación de 0.05
   b. Pruebe la hipótesis de no diferencia en la proporción de componentes con vida útil está entre 300 y 500 horas entre las dos máquinas. Use un nivel de significación de 0.01

5.2. PRUEBA DE HIPÓTESIS PARA EL CUOCIENTE DE VARIANZAS.

CONCEPTOS CLAVES: Parámetros. Estimadores. Estadístico de prueba. Nivel de significación. Región de rechazo

Resumen de conceptos y propiedades:

1. Sea $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ $\quad ; Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ dos poblaciones independientes.
2. En dos muestra de tamaños *n* y *m* de X e Y respectivamente se obtiene $\bar{X}, \bar{Y}, S_X \ y \ S_Y$.
3. Parámetro involucrado: $\dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$
4. Estimadores: $\hat{\sigma}_1^2 = S_X^2 \quad ; \hat{\sigma}_2^2 = S_Y^2$

Pasos a seguir al realizar la prueba de hipótesis:

P1: Plantear hipótesis.

Hipótesis nula $H_0 : \dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = 1$ v/s Hipótesis alternativa $H_1 : \dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \neq 1 ; H_2 : \dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < 1 ; H_3 : \dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} > 1$

P2: Estadístico de prueba: $F_0 = \dfrac{S_X^2}{S_Y^2} \sim F_{(n-1,m-1)}$

P3: Establecer un nivel de significación: $\alpha = P(\text{Re}\,chazar\ H_0 / H_0\ es\ verdadero)$

P4: Región de rechazo de H_0

Para $H_0 \ v/s \ H_1 \Rightarrow R_1 = \left\{ x / x < F_{(\frac{\alpha}{2}, n-1, m-1)} \quad o \ x > F_{(1-\frac{\alpha}{2}, n-1, m-1)} \right\}$

Para $H_0 \ v/s \ H_2 \Rightarrow R_2 = \left\{ x / x > F_{(1-\alpha, n-1, m-1)} \right\}$

Para $H_0 \ v/s \ H_3 \Rightarrow R_3 = \left\{ x / x < F_{(\alpha, n-1, m-1)} \right\}$

P5: Decisión: Si $F_0 \in R_i \Rightarrow$ se rechaza H_0 al nivel de significación α

P6: Conclusión: Se debe interpretar la decisión tomada en Paso 5.

EJERCICIO RESUELTO, PASO A PASO:

EJERCICIO 6: (Aplicación en Ciencias de la Ingeniería)

Un nuevo dispositivo de filtrado se instala en una planta química. Antes y después de su instalación una muestra aleatoria entrega la siguiente información del porcentaje de impurezas:

Antes de instalación : $n = 8 \qquad S_X^2 = 101.17$

Después de instalación: $m = 9 \quad S_Y^2 = 94.73$

Pregunta: Pruebe la hipótesis de que las varianzas del porcentaje de impurezas antes y después de la instalación del nuevo dispositivo son iguales. Use un nivel de significación de 0.05

Esquema de solución

Paso 1: Leer cuidadosamente el enunciado del problema.

Paso 2: Identificar la variable en estudio y los parámetros involucrados.

Sea X = porcentaje de impurezas antes de instalación del nuevo dispositivo.

Y = porcentaje de impurezas después de instalación del nuevo dispositivo.

Suponer que $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \quad ; \quad Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

Paso 3: Estimar los parámetros involucrados.

De la información entregada por las muestras se obtiene que:

$\hat{\sigma}_1^2 = S_X^2 = 101.17 \ y \quad \hat{\sigma}_2^2 = S_Y^2 = 94.73$

Paso 4: Leer la pregunta y revisar cual de los conceptos se debe usar para obtener lo pedido.

Para responder la pregunta se debe realizar una prueba de hipótesis para el cuociente de varianzas poblacionales, donde la hipótesis alternativa debe ser $H_1 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \neq 1,$ ya que se desea probar si las varianzas del porcentaje de impurezas antes y después de la instalación del nuevo dispositivo son iguales

Paso 5: Realizar la prueba siguiendo los seis pasos.

P1: Plantear hipótesis.

Hipótesis nula $H_0 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = 1$ v/s Hipótesis alternativa $H_1 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \neq 1$

P2: Estadístico de prueba: $F_0 = \frac{S_X^2}{S_Y^2} = \frac{101.17}{94.73} = 1.06798$

P3: Establecer un nivel de significación: $\alpha = P(\text{Re}\,chazar\ H_0 / H_0\ es\ verdadero)$

En este caso $\alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975$;

Luego en la tabla F de Fisher se obtiene:

$$a = F_{\left[\frac{\alpha}{2},\,(n-1,m-1)\right]} = F_{[0.025,\,(7,8)]} = \frac{1}{F_{[0.975,\,(8,7)]}} = \frac{1}{4.90} = 0.204$$

$$b = F_{\left[\frac{\alpha}{2},\,(n-1,m-1)\right]} = F_{[0.975,\,(7,8)]} = 4.52$$

P4: Región de rechazo para $H_0\ v/s\ H_1$

$$R_1 = \left\{ x / x < F_{(\frac{\alpha}{2},n-1,m-1)} \ o \ x > F_{(1-\frac{\alpha}{2},n-1,m-1)} \right\} = \{ x / x < 0.204 \ o \ x > 4.52 \}$$

P5: Decisión: Como $F_0 = 1.06798 < 4.52 \Rightarrow F \notin R_1 \Rightarrow$ No se rechaza H_0 al nivel de significación 0.05

P6: Conclusión: Con 95% de confianza las varianzas del porcentaje de impurezas antes y después de la instalación del filtro son iguales.

Paso 6: Redactar una respuesta a la pregunta:

Con 95% de confianza las varianzas poblacionales del porcentaje de impurezas antes y después de la instalación del nuevo dispositivo de filtrado son iguales.

EJERCICIOS PROPUESTOS:

1. (**Aplicación en Ciencias de la Ingeniería**) Los siguientes datos corresponden a la pureza del ácido en porcentaje observada en dos plantas de producción de ácido sulfúrico.

   Planta A   96.8 95.8 96.2 96.5   96.4 96.7 96.3 96 97.1 96.5
   Planta B   95.6 96 97.8 98.4 97.6 98.2 96.9 96.8

   Pruebe la hipótesis de que las varianzas de los porcentajes de pureza del ácido entre la planta B y la planta A son iguales usando un nivel de significación de 0.05.

2. (**Aplicación en Ciencias del mar**) Los siguientes datos representan el crecimiento (en cms.) de Protothaca Thaca (Almejas) en dos sectores costeros de la región de Antofagasta:

Bolsico	0.98	0.62	0.53	0.76	0.43	0.36	0.51	0.24	0.24
Coloso	0.40	0.14	0.16	0.21	0.09	0.02	0.02	0.01	

   Pruebe la hipótesis de que las varianzas del crecimientos de las almejas entre Coloso y Bolsico son iguales usando un nivel de significación de 0.05**.**

3. (**Aplicación en Ciencias de la Salud**) Se tomaron dos muestras de presión sistólica (en mm Hg.) a sujetos normales y sujetos hospitalizados, obteniendo la siguiente información:

   Normales (X)   : 146   142   135   140   154   163   138   168
   Hospitalizados (Y) : 164   176   165   172   169   171

   Pruebe la hipótesis de que las varianzas de la presión sistólica entre sujetos normales y hospitalizados son iguales usando un nivel de significación de 0.05.