6 PRUEBAS DE HIPÓTESIS NO PARAMÉTRICAS (Prof. Jimmy Reyes R-)

CONTENIDOS:

6.1. Prueba de Wilcoxon.
6.2 Prueba de Kruskal Wallis.

OBJETIVOS:

- Plantear hipótesis no paramétricas en dos o más poblaciones.
- Determinar los pasos a seguir al realizar una prueba de hipótesis no paramétrica.
- Redactar una conclusión con los resultados obtenidos de una prueba de hipótesis no paramétrica
- Realizar pruebas de hipótesis no paramétricas en problemas prácticos

6.1 PRUEBA DE WILCOXON.

CONCEPTOS CLAVES: Rangos. Estadístico de Wilcoxon. Nivel de significación. Región de rechazo**.** Conclusión.

RESUMEN DE CONCEPTOS Y PROPIEDADES:

De una muestra aleatoria de tamaño n se eligen al azar n_1 sujetos para aplicarles un tratamiento y el resto $n_2 = n - n_1$ se dejan como controles o se les aplica un tratamiento estándar. Denotemos por $x_{11}, x_{12}, \ldots\ldots, x_{1n_1}$ las observaciones de los tratados y $x_{21}, x_{22}, \ldots\ldots, x_{2n_2}$ las observaciones de los controles. Para realizar la prueba se ordenan todos los datos en forma no decreciente asignándoles un rango de 1 a *n*. Denotemos por $R_{11}, R_{12}, \ldots\ldots, R_{1n_1}$ a los rangos de los tratados y por $R_{21}, R_{22}, \ldots\ldots, R_{2n_2}$ a los rangos de los controles

Pasos a seguir al realizar una prueba de hipótesis:

P1: Plantear hipótesis.

Hipótesis nula H_0: No hay efecto del tratamiento

v/s Hipótesis alternativa H_1: El efecto del tratamiento produce valores grandes

H_2: El efecto del tratamiento produce valores pequeños

P2: Estadístico de prueba: $W_0 = \sum_{j=1}^{n_1} R_{1j}$ (Suma de rangos de los tratados)

P3: Establecer un nivel de significación: $\alpha = P(\text{Re}\,chazar\ H_0 / H_0\ es\ verdadero)$

P4: Región de rechazo de H_0

Para $H_0\ v/s\ H_1 \Rightarrow R_1 = \{x / x > c_1\}$ con $c_1 = \sigma_W z_{1-\alpha} + \mu_W$

Para $H_0\ v/s\ H_2 \Rightarrow R_2 = \{x / x < c_2\}$ con $c_2 = \sigma_W z_{\alpha} + \mu_W$

Donde $\mu_W = \dfrac{n_1(n_1 + n_2 + 1}{2}$ y $\sigma_W^2 = \dfrac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}$

P5: Decisión: Si $W_0 \in R_i \Rightarrow$ se rechaza H_0 al nivel de significación α

P6: Conclusión: Se debe interpretar la decisión tomada en Paso 5.

COMENTARIOS: El cálculo de W se modifica si hay observaciones iguales. En este caso se procede como sigue: a las observaciones iguales se les asigna el promedio de sus rangos normales y se denotan por R_{ij}^*, luego el estadístico de prueba es $W_0^* = \sum_{j=1}^{n_1} R_{1j}^*$

Además $\mu_{W^*} = \frac{n_1(n_1+n_2+1}{2}$ y $\sigma_{W^*}^2 = \frac{n_1 n_2 (n_1+n_2+1)}{12} - \frac{n_1 n_2 \sum_{i=1}^{e}(e_i^3 - e_i)}{12n(n-1)}$

Donde e = número de grupos con observaciones iguales

e_i = número de observaciones iguales en el grupo i (i = 1,2,…,e)

EJERCICIO RESUELTO, PASO A PASO:

(Aplicación en Ciencias de la salud)

Un grupo de ratones fue sometido a tensión provocándoles temor. Después de un tiempo en estas condiciones los ratones fueron comparados con los de un grupo control. Se pesan sus glándulas suprarrenales y se obtiene los siguientes resultados (en gramos):

Tratados (X): 3.8 6.8 8.0 3.6 3.9 4.5 3.9 4.5 3.9 5.9 6.0 5.7 5.6 4.5

Controles (Y): 4.2 4.8 4.8 2.3 6.5 4.9 3.6 2.4 3.2 4.9 4.0 3.8

Investigar si la tensión hace aumentar el peso de la glándula suprarrenal. Use $\alpha = 0.05$

Esquema de solución

Paso 1: Leer cuidadosamente el enunciado del problema.

Paso 2: Identificar la variable en estudio.

Sea X = Peso de la glándula suprarrenal de las ratas tratadas (en gramos).

Sea Y = Peso de la glándula suprarrenal de las ratas controles (en gramos).

Paso 3: Ordenar los datos y ranguear.

Variable	Y	Y	Y	X	Y	X	Y	X	X	X	Y	Y	X	X	X	Y	Y
Datos	2.3	2.4	3.2	3.6	3.6	3.8	3.8	3.9	3.9	3.9	4	4.2	4.5	4.5	4.5	4.8	4.8
Rangos	1	2	3	4.5	4.5	6.5	6.5	9	9	9	11	12	14	14	14	16.5	16.5

Variable	Y	Y	X	X	X	X	Y	X	X								
Datos	4.9	4.9	5.6	5.7	5.9	6	6.5	6.8	8								
Rangos	18.5	18.5	20	21	22	23	24	25	26								

Paso 4: Leer la pregunta y revisar cual de los conceptos se debe usar para obtener lo pedido. Para responder la pregunta se debe realizar una prueba de hipótesis no paramétrica de Wilcoxon.

Paso 5: Realizar la prueba siguiendo los seis pasos.

P1: Plantear hipótesis.

Hipótesis nula H_0: La tensión no afecta el peso de la glándula suprarrenal

v/s Hipótesis alternativa H_1: La tensión aumenta el peso de la glándula suprarrenal

P2: Estadístico de prueba; $W_0^* = 4.5+6.5+9+9+9+14+14+20+21+22+23++25+26 = 217$

P3: Nivel significación; $\alpha = 0.05$

P4: Región de rechazo de $H_0\ v/s\ H_1$ $R_1 = \{x / x > c_1\}$ para calcular c_1 se debe obtener μ_{W^*} y $\sigma_{W^*}^2$

$$\mu_{W^*} = \frac{14*(14+12+1)}{2} = \frac{14*27}{2} = 189 \quad \text{y} \quad \sigma_{W^*}^2 = \frac{14*12*27}{12} - \frac{14*12*\left[4*(2^3-2)+2*(3^3-3)\right]}{12*26*25} = 376.4492$$

Luego $c_1 = z_{0.95} * \sigma_{W^*} + \mu_{W^*} = 1.645 * \sqrt{376.4492} + 189 = 220.816$

P5: Decisión. Como $W_0^* = 217 < 220.816 \Rightarrow W_0^* \notin R_1 \Rightarrow$ No se rechaza H_0 al nivel de significación 0.05

P6: Conclusión. Con 95% de confianza la tensión no hace aumentar el peso de la glándula suprarrenal.

EJERCICIOS PROPUESTOS:

1. **(Aplicación en Ciencias de la Salud)** En un experimento diseñado para estimar los efectos de la inhalación prolongada de óxido de cadmio, 15 animales de laboratorio sirvieron de sujetos para el experimento, mientras que 10 animales similares sirvieron de controles. La variable de interés fue el nivel de hemoglobina después del experimento. Se desea saber si puede concluirse que la inhalación prolongada de óxido de cadmio disminuye el nivel de hemoglobina según los siguientes datos que presentamos, use $\alpha = 0.05$:

	Nivel de hemoglobina									
Expuestos	14.4	14.2	13.8	16.5	14.1	16.6	15.9	15.6	14.1	15.3
	15.7	16.7	13.7	15.3	14.0					
No expuestos	17.4	16.2	17.1	17.5	15.0	16.0	16.9	15.0	16.3	16.8

2. (**Aplicación en Ciencias de la Salud**) Se ensayó un tratamiento para aumentar el crecimiento de 10 ratas elegidas al azar, dejando otras 10 como control, después de aplicado el tratamiento se midió las ratas y comparado con la talla inicial se obtuvo el crecimiento logrado. Los resultados fueron:

	Crecimiento (en cms.)									
Controles	1.2	1.5	2.1	1.7	3.8	4.2	1.0	2.3	3.5	2.8
Tratadas	2.1	1.8	2.5	1.4	5.2	6.5	4.0	4.3	3.5	4.2

Verificar si el tratamiento es eficaz, usando un nivel de significación de 0.05.

3. (**Aplicación en Ciencias del mar**) Se desea probar si existe un incremento en el peso de dos poblaciones de peces que tienen la misma edad, al administrarles una dieta diferente. Las poblaciones son de 10 individuos c/u, estos se separaron en dos estanques, los del estanque A fueron alimentados con pellet (alimento de carácter animal granulado), y los del estanque B fueron alimentados con una microalga (nostoc comune). Verifique si el alimento del estanque A es más eficaz, usando un nivel de significación de 0.05. Los datos se muestran en la tabla siguiente:

	Peso									
Estanque A	287	264	276	278	260	289	290	271	278	297
Estanque B	240	270	215	283	259	291	263	238	254	265

6.2 PRUEBA DE KRUSKAL WALLIS.

CONCEPTOS CLAVES: Rangos. Estadístico de Kruskal Wallis. Nivel de significación. Región de rechazo**.** Conclusión.

Se desea comparar k tratamientos diferentes, para lo cual se elige una muestra aleatoria de *n* sujetos y se divide aleatoriamente para aplicarles los diferentes tratamientos en k gruos de tamaños $n_1, n_2, ..., n_k$ tal que $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. Denotemos las observaciones de los tratamiento por

Tratamiento 1	$x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n_1}$
Tratamiento 2	$x_{21}, x_{22}, ..., x_{2n_2}$
$\vdots$	$\vdots$
Tratamiento k	$x_{k1}, x_{k2}, ..., x_{kn_k}$

Para realizar la prueba se ordenan todos los datos en forma no decreciente asignándoles un rango de 1 a *n*. Denotemos los rangos asignados en cada tratamiento por

Tratamiento 1	$R_{11}, R_{12}, ..., R_{1n_1}$
Tratamiento 2	$R_{21}, R_{22}, ..., R_{2n_2}$
$\vdots$	$\vdots$
Tratamiento k	$R_{k1}, R_{k2}, ..., R_{kn_k}$

Se suman los rangos en cada tratamiento y se denotan por $R_i = \sum_{j=1}^{n_i} R_{ij}$

Pasos a seguir al realizar la prueba de hipótesis de Kruskal Wallis:

P1: Plantear hipótesis.

Hipótesis nula H_0: No hay diferencia entre los tratamientos

v/s Hipótesis alternativa H_A: Alguna diferencia existe

P2: Estadístico de prueba: $K_0 = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{k_1} \frac{R_i^2}{n_i} - 3(n+1)$

P3: Establecer un nivel de significación: $\alpha = P(\text{Re}\,chazar\ H_0 / H_0\ es\ verdadero)$

P4: Región de rechazo de H_0

Para $H_0\ v/s\ H_A \Rightarrow R = \{x / x > c\}$ con $c = \chi^2_{(1-\alpha, k-1)}$

P5: Decisión: Si $K_0 \in R \Rightarrow$ se rechaza H_0 al nivel de significación α

P6: Conclusión: Se debe interpretar la decisión tomada en Paso 5.

COMENTARIOS: El cálculo de K se modifica si hay observaciones iguales. En este caso se procede como sigue: a las observaciones iguales se les asigna el promedio de sus rangos normales y se denotan por R_{ij}^*, luego $R_i^* = \sum_{j=1}^{n_i} R_{1j}^*$ es la suma de rangos medios del tratamiento i, y el estadístico de prueba es

$$K^* = \frac{\frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{k_1} \frac{\left(R_i^*\right)^2}{n_i} - 3(n+1)}{1 - \frac{\sum_{j=1}^{e} (e_j^3 - e_j)}{n^3 - n}}$$

Donde e = número de grupos con observaciones iguales

e_j = número de observaciones iguales en el grupo j (j = 1,2,...,e)

EJERCICIO RESUELTO, PASO A PASO:

(APLICACIÓN EN CIENCIAS DE LA SALUD)

Se desea comparar tres tratamientos para la rehabilitación de lesiones en deportistas de elite, para lo cual se elige una muestra de 14 deportistas con lesiones equivalentes y se les distribuye aleatoriamente para aplicarles los diferentes tratamientos. Luego de terminado los tratamientos se mide el porcentaje de recuperación de la lesión obteniendo los siguientes resultados:

Tratamiento 1: 21 23 59 38 78

Tratamiento 2: 44 72 65 43 79

Tratamiento 3: 39 46 61 49

Usando un nivel de significación de 0.05 pruebe si existe alguna diferencia en los porcentajes de recuperación entre los diferentes tratamientos

Esquema de solución

Paso 1: Leer cuidadosamente el enunciado del problema.

Paso 2: Identificar la variable en estudio.

Sea X = Porcentaje de recuperación con tratamiento 1.

Sea Y = Porcentaje de recuperación con tratamiento 2.

Sea Z = Porcentaje de recuperación con tratamiento 3

Paso 3: Ordenar los datos y ranguear.

Variable	X	X	X	Z	Y	Y	Z	Z	X	Z	Y	Y	X	Y
Datos	21	23	38	39	43	44	46	49	59	61	65	72	78	79
Rangos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Los rangos y la suma de rangos por tratamiento son:

Tratamiento 1: 1 2 3 9 13 $R_1 = 28$

Tratamiento 2: 6 12 11 5 14 $R_2 = 48$

Tratamiento 3: 4 7 10 8 $R_3 = 29$

Paso 4: Leer la pregunta y revisar cual de los conceptos se debe usar para obtener lo pedido. Para responder la pregunta se debe realizar una prueba de hipótesis no paramétrica de Kruskal Wallis.

Paso 5: Realizar la prueba siguiendo los seis pasos.

P1: Plantear hipótesis.

Hipótesis nula H_0: No hay diferencia entre los tratamientos

v/s Hipótesis alternativa H_1: Alguna diferencia existe

P2: Estadístico de prueba: $K_0 = \frac{12}{14*15}\left[\frac{(28)^2}{5} + \frac{(48)^2}{5} + \frac{(29)^2}{4}\right] - 3*15 = 2.31$

P3: Nivel significación; $\alpha = 0.05$

P4: Región de rechazo de $H_0 \ v/s \ H_A$

$$R = \{x / x > c\} = \{x / x > \chi^2_{(0.95,2)}\} = \{x / x > 5.643\}$$

P5: Decisión. Como $K_0 = 2.31 < 5.643 \Rightarrow K_0 \notin R \Rightarrow$ No se rechaza H_0 al nivel de significación 0.05

P6: Conclusión. Con 95% de confianza no existe diferencia en los porcentajes de recuperación entre los diferentes tratamientos.

EJERCICIOS PROPUESTOS:

1. (**Aplicación en Ciencias del Mar**) La Agencia para la Protección Ambiental quiere determinar si los cambios en la temperatura del agua del océano, causados por una planta nuclear, tienen un efecto significativo sobre la fauna marina en la región. Se dividieron al azar cuatro grupos de especimenes recién nacidos de cierta especie de peces. Se colocaron los grupos en medios ambientes separados que simulan el océano, completamente idénticos con excepción de la temperatura del agua. Seis meses después se pesaron los especimenes. Los resultados (en libras) fueron los siguientes:

Temperatura	Peso de los especimenes						
38º F	22	24	16	18	19	21	
42º F	15	21	26	16	25	17	19
46º F	14	28	21	19	24	23	
50º F	17	18	13	20	21		

¿Proporcionan los datos evidencia suficiente para indicar que una o más de las temperaturas tiende a producir diferencias en el incremento del peso, que las otras temperaturas?. Use $\alpha = 0.05$

2. (**Aplicación en Ciencias del Mar**) Para realizar un estudio de contaminación por plomo en especimenes que habitan en cuatro sectores costeros diferentes, se selecciona muestras aleatorias de especimenes en los cuatro sectores y se miden los porcentajes de plomo observados en ellos. Los resultados se muestran en la tabla siguiente:

Sector A	0.027	0.025	0.029	0.026	
Sector B	0.025	0.028	0.030	0.027	0.024
Sector C	0.034	0.029	0.032	0.031	0.036
Sector D	0.030	0.033	0.031		

Pruebe la hipótesis de no diferencia en los porcentajes de plomo entre los sectores Use $\alpha = 0.01$.

3. **(Aplicación en Ciencias de la Ingeniería)** Una operación de llenado tiene tres máquinas idénticas que se ajustan para vaciar una cantidad específica de un producto en recipiente de igual tamaño. Con el propósito de verificar la igualdad de las cantidades promedio vaciadas por cada máquina, se toman muestras aleatorias en forma periódica, de cada una. Para un periodo particular, se observaron los datos que aparecen en la siguiente tabla:

Máquina A	16	15	15	14	16	
Máquina B	18	19	19	20	19	19
Máquina C	19	20	18	20	19	

¿Existen algunas diferencias estadísticamente significativas en las cantidades promedio vaciadas por las tres máquinas? Use $\alpha = 0.05$.