TALLER SOBRE FUNCIONES CUADRÁTICAS-EXPONENCIALES-LOGARITMICAS

PROFESOR: CARLOS FARÍAS FARIAS

1. Dado $f(x) = -x^2 + 6x$
   a) Determine el vértice de la gráfica de función
   b) Indique las intersecciones con los ejes coordenados
   c) Construya la grafica de f
   d) Usando gráfica determine el dominio y rango de f
   e) ¿Cuál es valor máximo de la función y para que valor de se produce?
   f) ¿En que intervalo crece la función y en que intervalo decrece la función?
   g) ¿En que intervalo $f(x) > 0$ y $f(x) < 0$
   h) ¿Entre que valores de x, $f(x) \geq 5$?

2. Un granjero desea cercar un campo rectangular y dividirlo en tres partes colocando dos cercas paralelas a sus lados. Si cuenta con 1000 metros de cerca. ¿Que dimensiones deberá tener el terreno para que el área ocupada sea máxima?

3. Un objeto se lanza verticalmente hacia arriba desde la azotea de un edificio, con velocidad inicial de $144 \frac{pie}{seg}$ y su distancia $D(t)$ en pies sobre el piso a los t segundos está dada por $D(t) = -16t^2 + 144t + 100$
   a) ¿Cuál es la altura máxima sobre el edificio?
   b) ¿Y la atura del edificio?

4. Un investigador en fisiología ha decidido que la función $r(x) = -x^2 + 12x - 20$ es un modelo matemático aceptable para describir el número de impulsos emitidos después que se ha estimulado un nervio. Aquí r es el número de respuestas por milisegundos(ms) y x es el número de milisegundos transcurrido desde que es estimulado el nervio
   a) ¿Cuántas respuestas son de esperar después de 3ms?
   b) Si hay 16 respuestas, ¿cuántos milisegundos han transcurrido desde que fue estimulado el nervio?
   c) ¿Cuál es el mayor número de respuesta y a los cuántos milisegundos desde que fue estimulado el nervio?

5. Un fabricante de tornillos encontró que el costo por caja para fabricar x cajas de tornillos está dada por $C(x) = x^2 - 10x + 32$
   a) ¿Cuál es el costo por caja para fabricar 10 cajas de tornillos
   b) ¿Cuántas cajas debe fabricar para minimizar el costo por caja?
   c) ¿Cuál es el costo mínimo por caja?

6. El precio V(t), en dólares, de un equipo médico t años después de su compra, se desvaloriza mediante el modelo $V(t) = Be^{-0.20t}$, donde B es una constante. Si el equipo se compró en U$8000:
   a) ¿Cuál será su valor en 2 años?
   b) ¿Cuánto tiempo deberá usarse el equipo para que se desvalorice a la mitad de su precio original?

7. El origen de la diversidad genética es la mutación, o sea, los cambios en la estructura química de los genes. Si un gen muta a una tasa constante m, y las demás fuerzas evolutivas no tienen importancia, entonces la frecuencia F del gen original, después de t generaciones, es $F = F_0(1-m)^t$, donde F_0 es la frecuencia cuando t = 0.
   a. Despeje a t de la ecuación utilizando logaritmo decimales
   b. Si $m = 5 \cdot 10^{-5}$, ¿después de cuántas generaciones $F = \frac{1}{2}F_0$?

8. Según la ley de enfriamiento de Newton. La razón a que se enfría un objeto caliente es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la temperatura de su entorno. La temperatura T de un objeto después de un periodo de tiempo t es
$$T = T_m + \left(T_0 - T_m\right) \cdot e^{-kt}$$
Donde T_0 es la temperatura inicial y T_m la temperatura del medio circundante.
Un objeto se enfría de 180°F a 150°F en 20 minutos cuando esta rodeado de aire a 60°F. ¿Cuál será su temperatura de 1 hora de enfriamiento.

Solución

1. Dado $f(x) = -x^2 + 6x$

   a) Determine el vértice de la gráfica de función cuadrática

   Primero analizamos los coeficientes de la función cuadráticas, ya que nos entrega información valiosa acerca del comportamiento de la gráfica de la función

   $a = -1 < 0$, **esto nos indica que la grafica de función se abre hacia abajo**, luego en **el vértice de la parábola** (gráfica de la función cuadrática) tenemos **el máximo valor de la función**, sus coordenadas están dadas por

   $\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right), a = -1, b = 6 \Rightarrow \frac{-6}{2\cdot(-1)} = 3 \Rightarrow f(3) = -(3)^2 + 6\cdot 3 = 9$ luego las coordenadas del vértice son $(3,9)$

   Otra manera también usando los coeficientes podemos determinar las coordenadas del vértice como $\left(\frac{-b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$

   $a = -1, b = 6, c = 0$

   $\left(\frac{-b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right) = \left(\frac{-6}{2(-1)}, -\frac{(6)^2-4(-1)\cdot 0}{4(-1)}\right) = (3,9)$, luego las coordenadas del vértice son $(3,9)$

   b) Intersecciones con los ejes coordenados

   Intersección eje X, para eso hacemos $y = f(x) = 0$, es decir

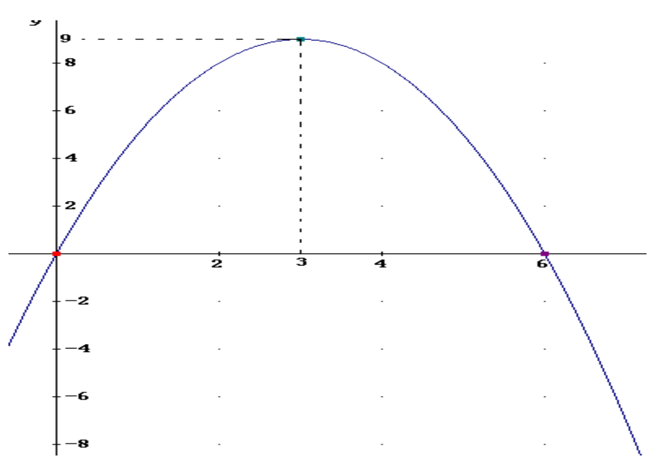
   $0 = -x^2 + 6x \Rightarrow 0 = -x(x-6) \Rightarrow -x = 0 \; o \; x - 6 = 0 \Rightarrow x = 0 \; o \; x = 6$

   Luego las intersecciones con el eje X son $(0,0)$ y $(6,0)$

   Intersección eje Y, para eso hacemos $x = 0$

   Luego las intersección con el eje Y es $(0,0)$

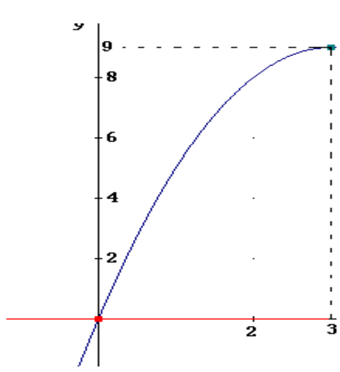
   c) Dominio de f = $\Re$ (Todos los números reales) rango de f $(-\infty.9]$

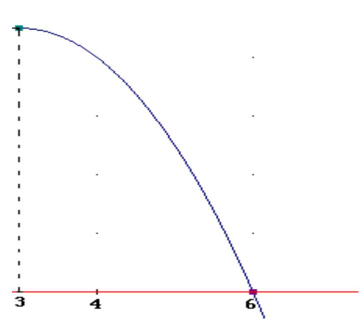


   d) El valor máximo de la función es 9 cuando $x = 3$

   e) La función crece $x < 3 \Leftrightarrow \forall x \in (-\infty, 3)$

   La función decrece $x > 3 \Leftrightarrow \forall x \in (3, +\infty)$



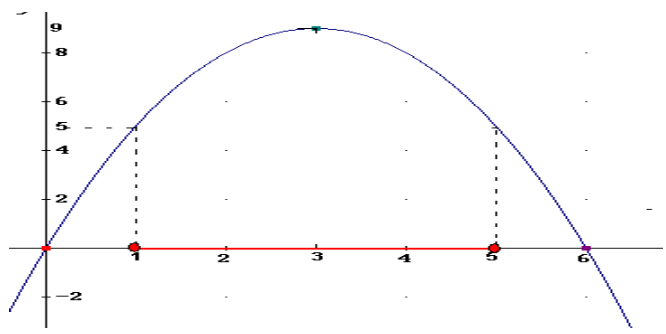


f) $f(x) > 0 \text{ si } x \in (0,6)$

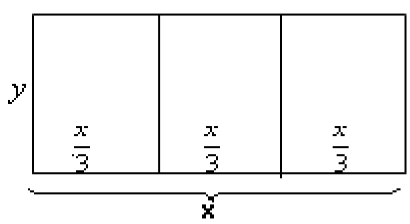
$f(x) < 0 \text{ si } x \in (-\infty,0) \cup (6,+\infty)$

g) $f(x) \geq 5 \Leftrightarrow -x^2+6x \geq 5 \Leftrightarrow x^2-6x+5 \leq 0 \Leftrightarrow (x-5)(x-1) \leq 0$

Luego $f(x) \geq 5 \ \forall x \in [1,5]$



2. Perímetro = $P = 2x+2y \Leftrightarrow 1000 = 2x+2y \Leftrightarrow x+y=500 \Rightarrow y = 500-x$



$$Área = x \cdot y = x(500-x) = 500x - x^2 = -x^2+500x$$

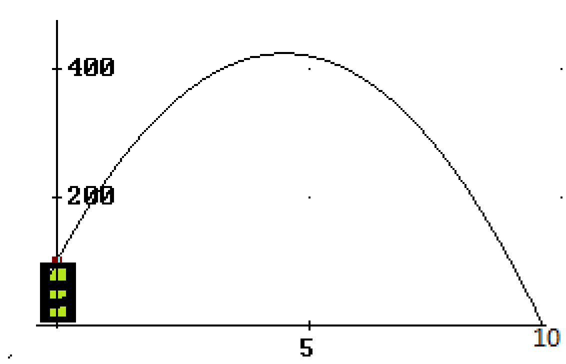
$a=-1<0, \quad b=500, \quad c=0$, su vértice $v_p = \left(\frac{-b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right) = (250, 62500)$

Las dimensiones que deberá tener el terreno para que el área ocupada sea máxima es de $x = 250 \Rightarrow y = 250$

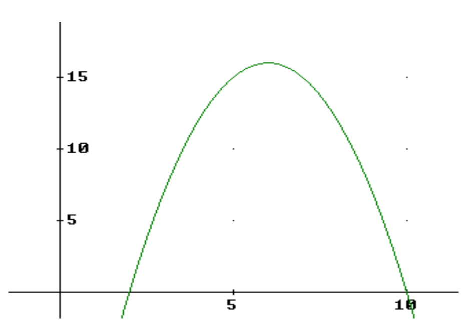
3. $D(t) = -16t^2+144t+100, \quad a=-16<0, b=144, c=100$

a) $v_p = \left(\frac{\cancel{-}144}{\cancel{-}32}, \cancel{-}\frac{144^2+6400}{\cancel{-}64}\right) = (4.5, 424)$, la altura máxima sobre el edificio es 424 – 100 = 324 , el inicio es sobre el edificio es decir cuando t = 0

b) La atura del edificio es 100



4. $r(x) = -x^2+12x-20$



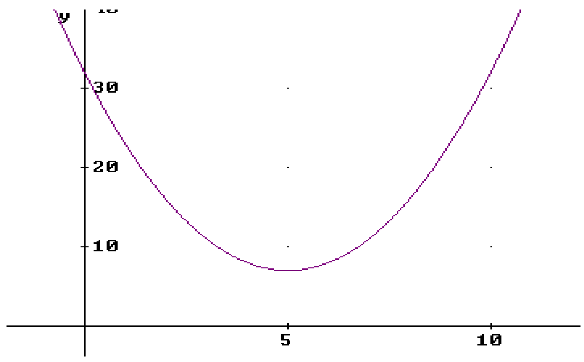
a) $r(3)=-(3)^2+12(3)-20=7$ respuestas.

b) $16=-x^2+12x-20 \Leftrightarrow x^2-12x+36=0 \Leftrightarrow (x-6)^2=0 \Rightarrow x=6$ milisegundos han transcurrido desde que fue estimulado el nervio.

c) $v_p=\left(\frac{\cancel{-}12}{2(\cancel{-}1)}, \cancel{-}\frac{(12)^2-4(-1)(-20)}{\cancel{-}4}\right)=(6,16)$

El mayor número de respuesta es 16 y se produce a los 6 milisegundos desde que fue estimulado el nervio.

5. $C(x)=x^2-10x+32$



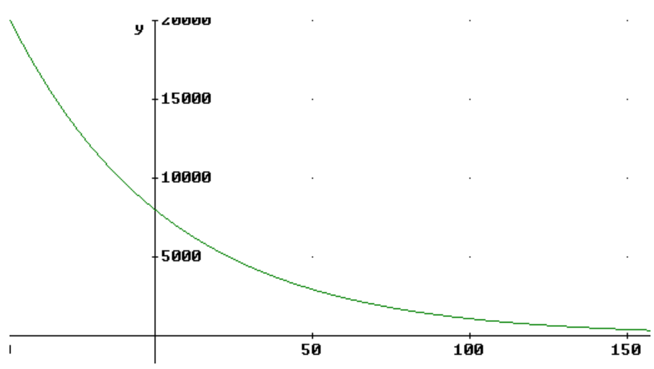
a) $C(10)=(10)^2-10(10)+32=32$ El costo por caja para fabricar 10 cajas de tornillos es 32

b) $v_p=\left(\frac{-(-10)}{2(1)}, -\frac{(-10)^2-4(1)(32)}{4}\right)=(5,-(-7))=(5,7)$

Se deben fabricar 5 cajas para minimizar el costo por caja

c) El costo mínimo por caja es 7

6. $V(t)=Be^{-0.20t}$



a) Su valor en 2 años es de 7686,315 dólares

b) $4000=8000\cdot e^{-0.20t} \Leftrightarrow \frac{1}{2}=e^{-0.20t} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right)=-0,20t \Leftrightarrow \frac{-\ln(2)}{-0,20}=t \Rightarrow t=3,4657$

El tiempo que deberá usarse el equipo para que se desvalorice a la mitad de su precio original

7. $F=F_0(1-m)^t$, m tasa constante F_0 es la frecuencia cuando $t_0=0$

a) $F=F_0(1-m)^t$ Aplicando logaritmo natural

$$\log(F)=\log(F_0)+t\log(1-m) \Leftrightarrow \log(F)-\log(F_0)=t\log(1-m)$$

$$\log\left(\frac{F}{F_0}\right)=t\log(1-m) \Leftrightarrow t=\frac{\log\left(\frac{F}{F_0}\right)}{\log(1-m)}$$

b) $\frac{\cancel{F_0}}{2}=\cancel{F_0}\left(1-5\cdot10^{-5}\right)^t \Leftrightarrow \frac{1}{2}=\left(1-5\cdot10^{-5}\right)^t$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}=\left(1-\frac{5}{10^5}\right)^t \Leftrightarrow \frac{1}{2}=(0.99995)^t \Leftrightarrow \cancel{\lg(1)}_0-\lg(2)=t\log(0.99995)$$

$$t=\frac{-\log(2)}{\log(0.99995)}=\frac{\cancel{-}0,301029995}{\cancel{-}0,000021715}=13,86\approx 14$$

8. Según la ley de enfriamiento de Newton. La razón a que se enfría un objeto caliente es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la temperatura de su entorno. La temperatura T de un objeto después de un periodo de tiempo t es

$$T=T_m+(T_0-T_m)\cdot e^{-kt}$$

Donde T_0 es la temperatura inicial y T_m la temperatura del medio circundante.

Un objeto se enfría de 180°F a 150°F en 20 minutos cuando está rodeado de aire a 60°F. ¿Cuál será su temperatura de 1 hora de enfriamiento.

$T=T_m+(T_0-T_m)\cdot e^{-kt}$

$180°=T_0 \; cuando, \; t=0$

$150°=60°+(180°-60°)\cdot e^{-20k}$, para $t=20$ minutos

$150°-60°=(180°-60°)\cdot e^{-20k} \Leftrightarrow 90°=120°\cdot e^{-20k} \Leftrightarrow \frac{\cancel{9}^3\cancel{0}}{\cancel{12}_4\cancel{0}}=e^{-20k}$

$\frac{3}{4}=e^{-20t}$, aplicando logaritmo natural

$$\ln\left(\frac{3}{4}\right)=\ln\left(e^{-20k}\right)\Leftrightarrow \ln\left(\frac{3}{4}\right)=-20k \Leftrightarrow k=\frac{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}{-20}\approx 0,0144$$

$F=60°+(180°-60°)\cdot e^{-0,0144t}$, cuando $t=60$, minutos

$F=60°+(180°-60°)\cdot e^{-0,0144\cdot 60}=60°+120\cdot e^{-0,864}=110,5767$, su temperatura es aproximadamente de 111°