

Unidad 3: Teoría elemental de probabilidades.

2.0 Contenidos, objetivos y palabras claves.

Contenidos:

3.0	Contenidos, objetivos y palabras claves.	81
3.1	Experimento determinístico y aleatorio. Espacio muestral contable infinito. Sucesos y álgebra de sucesos.	82
3.1.1	Ejercicios resueltos, paso a paso (primera parte).	83
3.1.2	Ejercicios propuestos (primera parte).	91
3.1.3	Ejercicios resueltos, paso a paso (segunda parte).	92
3.1.4	Ejercicios propuestos (segunda parte).	103
3.2	Probabilidad: definición y propiedades.	105
3.2.1	Ejercicios resueltos, paso a paso.	107
3.2.2	Ejercicios propuestos.	110
3.3	Probabilidad condicional e independencia de sucesos.	112
3.3.1	Ejercicios resueltos, paso a paso.	114
3.3.2	Ejercicios propuestos.	122

Objetivos:

- Conocer, caracterizar y aprender de modelos que nos permitan estudiar variables observables y no estén sujeto a las contingencias de observación. Las observaciones experimentales se convertirán en posibles realizaciones del modelo.
- Reconocer y definir adecuadamente espacios de muestra y sucesos en situaciones problemáticas.
- Utilizar eficazmente la notación que permitirá aplicar las propiedades de probabilidad beneficiando la solución ajustada a los requerimientos exigidos por una situación problemática.
- Interpretar correctamente los resultados obtenidos en las soluciones planteadas.
- Interpretar correctamente las soluciones a situaciones de condicionalidad e independencia.
- Diferenciar claramente la mutua exclusión y la independencia de sucesos.

Palabras Clave:

Espacio de muestra
 Sucesos
 Sucesos mutuamente excluyentes
 Sucesos independientes

Unión e intersección de sucesos
 Probabilidad condicional

3.1. Experimento determinístico y aleatorio. Espacio muestral contable e infinito. Sucesos y álgebra de sucesos.

Palabras Clave: Experimento, Espacio de muestra, sucesos, sucesos mutuamente excluyentes, unión e intersección de sucesos.

Resumen de conceptos y propiedades.

- ✓ Un **experimento** es un procedimiento que consiste en un diseño de ejecución, una variable (o variables) en estudio y un objetivo de experimentación, con la intención de obtener un resultado observable entre todos los posibles.
- ✓ El conjunto de resultados posibles de un experimento es llamado **espacio muestral** o **espacio de muestras** (denotado por el símbolo Ω).
- ✓ Si el conjunto de resultados posibles consta de un único resultado el experimento es denominado **determinístico**. Si tiene más de un resultado posible es llamado **no determinístico** o **aleatorio**. Son de interés en esta sección los **experimentos aleatorios**.
- ✓ Se llama **suceso** a cualquier subconjunto del espacio de muestras Ω al cual se le pueda asociar una medida de **ocurrencia**.
- ✓ Se dice que un suceso **ocurre** si y sólo si se verifica en la experiencia uno de los resultados que contiene.
- ✓ Se llama **suceso elemental** a un suceso que tiene un único resultado posible. Es decir, si $\Omega = \{r_1, r_2, r_3, \dots, r_N\}$ es un espacio de muestras con N resultados posibles, entonces $\{r_i\}$ con $i = 1, 2, 3, \dots, N$, son sucesos elementales.
- ✓ La unión de sucesos elementales forma el espacio de muestras, esto es, si $\Omega = \{r_1, r_2, r_3, \dots, r_N\}$ entonces $\Omega = \{r_1\} \cup \{r_2\} \cup \dots \cup \{r_N\} = \bigcup_{i=1}^N \{r_i\}$ o bien si el espacio de muestras es $\Omega = \{r_1, r_2, r_3, \dots\}$ entonces $\Omega = \{r_1\} \cup \{r_2\} \cup \dots = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{r_i\}$.

- ✓ Un espacio de muestras es llamado **espacio finito** si es de la forma $\Omega = \{r_1, r_2, r_3, \dots, r_N\}$ para algún número natural N . Es llamado espacio **infinito numerable** si es de la forma $\Omega = \{r_1, r_2, r_3, \dots\}$ y es un espacio **infinito** si verifica $\Omega \subseteq \mathbb{R}$.
- ✓ Si A y B son sucesos en Ω entonces $A \cup B$ es también suceso y ocurre si y sólo si ocurre A , ocurre B u ocurren A y B simultáneamente.
- ✓ Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ son sucesos en Ω entonces $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$ es también suceso y ocurre si y sólo si **ocurre al menos algún** A_i .
- ✓ Si $A_1, A_2, \dots$ son sucesos en Ω entonces $A_1 \cup A_2 \cup \dots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ es suceso y ocurre si y sólo si **ocurre al menos algún** A_i .
- ✓ Si A y B son sucesos en Ω entonces $A \cap B$ es suceso y ocurre si y sólo si ocurren A y B simultáneamente.
- ✓ Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ son sucesos en Ω entonces $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i$ es suceso y ocurre si y sólo si **ocurren todos** los A_i .
- ✓ Si $A_1, A_2, \dots$ son sucesos en Ω entonces $A_1 \cap A_2 \cap \dots = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ es suceso y ocurre si y sólo si **ocurren todos** los A_i .
- ✓ A^c es suceso y ocurre si y sólo si **no ocurre** A .

3.1.1 Ejercicios resueltos, paso a paso:

Ejemplo 1.

(Aplicación en ciencias de la Salud)

En un establecimiento de atención primaria de salud se mide el peso de un paciente recién ingresado. Determine la variable en estudio y el espacio de muestras asociado.

Esquema de solución

Paso 1. Leer detenidamente el problema hasta identificar la información que da y lo que está pidiendo que se responda:

- ✓ El experimento consiste en medir el peso de un paciente ingresado a un establecimiento de atención primaria.
- ✓ Se pide identificar la variable que se estudia y su espacio de muestras asociado. A la variable y, por tanto, al experimento.

Paso 2. Desarrollar fundamentadamente una solución al problema planteado:

Es claro que en esta experiencia la variable que se está midiendo es

X : **peso** de un paciente ingresado al centro de atención primaria.

Cuando se mide el peso de un paciente se están tomando “muestras” de valores específicos logrados en la situación experimental de medición de la variable peso.



Es claro que, a priori, no se pueden medir **todos** los pesos que puedan pesar las personas que **posiblemente** sean atendidas por este establecimiento de salud. Eso sería imposible. Pero se puede razonar de la siguiente manera:

En verdad, los pesos **posibles** de una persona cualquiera, son valores en un intervalo de la forma $[0, M]$ donde M es el peso máximo observable en un individuo. Si logramos analizar los pesos en este intervalo y caracterizarlos grupalmente podremos recién decir algo de la variable peso. Pero, como se sabe, estos máximos de peso nunca se pueden determinar con certeza porque cuando se fija un valor, nos llevamos la sorpresa de que en el tiempo los hechos cambian y ese valor es superado, muchas veces, con el asombro de quienes viven la época. Esto hace que los modelos de análisis de la variable peso no queden dependiendo de estas *particularidades*.

Un intervalo mucho más trascendente es de la forma $[0, +\infty]$ que deja abierta la posibilidad de asumir cualquier máximo posible (al menos teóricamente). Desearíamos que, para interpretar este intervalo en una situación real, la posibilidad de observar un valor muy “grande” de peso sea “poco probable”. Las observaciones experimentales se convertirán en posibles realizaciones de este modelo.

Paso 3. Establecer una respuesta al problema:

Resp.: El espacio de muestras del peso de los pacientes que asisten al establecimiento de atención primaria de salud es $\Omega = (0, \infty) = \mathbb{R}^+$ (espacio muestral infinito).

Nota: *El objetivo último del estudio de los modelos de tipo aleatorio radica en la necesidad de anticiparse a hechos que, desde el punto de vista que nos interesa, pueden ser importantes de prever.*

Por ejemplo, cuando se produce un brote de viruela, es importante prever la propagación del contagio. En este caso, nos preguntamos acerca de cuál es la posibilidad, por ejemplo, de que el contagio se continúe propagando en la medida en que pasan los días, o bien que se pueda estabilizar y comenzar a disminuir hasta desaparecer. Esto se hace observando primero si hay aumento del número de casos, en la medida en que transcurre el tiempo o bien si hay una disminución (que es lo deseable).

Ejemplo 2.

(Aplicación en ciencias de la Salud)

En las campañas de vacunación antigripal masiva, que se realiza a personas de la tercera edad en cierto período del año, lo deseable es anticipar un conocimiento sobre el comportamiento de los tamaños de los grupos etarios a los que se favorecerá con vacunación gratuita, con la intención de determinar el número de dosis que se deberá tener disponibles por parte del Ministerio de Salud para el éxito de esta campaña de salud pública.

Determinar el espacio de muestras asociado a la experiencia de estudio de la cantidad de personas que necesitan la vacuna antigripal.

Esquema de solución

Paso 1. Leer detenidamente el problema hasta identificar la información que da y lo que está pidiendo que se responda:

- ✓ Se desea determinar el número de dosis que el Ministerio de Salud deberá tener disponibles para la campaña de vacunación antigripal masiva.
- ✓ Se pide identificar el espacio de muestras asociado al estudio de la cantidad de personas que necesitan la vacuna antigripal.

Paso 2. Desarrollar fundamentadamente una solución al problema planteado:

Si razonamos en forma semejante al ejemplo anterior, observamos que la cantidad de personas de la tercera edad que puedan ser vacunadas puede ser 1 o 2 o 3 o ... o cierta cantidad máxima que puede depender del tamaño de la población a la cual se dará el beneficio. Pero, un **modelo** general no debe atender a contingencias particulares sino a cualquier eventualidad. Por lo tanto un modelo de espacio de muestra adecuado es de la forma $\Omega = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$ (espacio

infinito numerable). Valores “muy altos” pasan a ser poco probables y para cada población demográfica se debe estudiar la especificación de un máximo para tomar una determinación más cercana a la cantidad de vacunas que se debe disponer.

Paso 3. Establecer una respuesta al problema planteado:

Resp.: $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, M\}$, donde este valor máximo M se debe determinar. O bien, $\Omega = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$ que sería el espacio de muestras modelo.

Nota: Se hace importante introducir un concepto que se utiliza mucho pero que pasa desapercibido en muchas situaciones informativas: la **probabilidad** de que se deba tener, por ejemplo, M dosis disponibles.

Ejemplo 3.

(Aplicación en ciencias de la Salud)

En un hospital se desea estudiar la proporción de niños infectados de áscaris.
Determine:

- el espacio muestral asociado al experimento que verificará si un niño elegido al azar tiene áscaris.
- el espacio muestral asociado al experimento que verificará si 10 niños elegidos al azar tienen áscaris.

Esquema de solución

Paso 1. Leer detenidamente el problema hasta identificar la información que da y lo que está pidiendo que se responda:

- Experimento aleatorio base:

ξ_1 : Examinar un niño ingresado al hospital para determinar si está infectado de áscaris o no.

Espacio muestral asociado:

$\Omega_1 = \{a, a'\}$ donde a denota a un niño infectado de áscaris y a' denota a un niño sin áscaris.

Resp.: El espacio muestral asociado al experimento ξ_1 que verificará si un niño elegido al azar tiene áscaris es $\Omega_1 = \{a, a'\}$, donde a denota a un niño infectado de áscaris y a' a un niño sin áscaris.

- Para determinar el espacio muestral asociado al experimento que verificará si 10 niños elegidos al azar tienen áscaris razonamos de la siguiente manera:

Si se eligieran 2 niños:

Experimento aleatorio ξ_2 : Examinar dos niños ingresados al hospital y determinar si están infectados de áscaris o no.

Espacio Muestral $\Omega_2 = \{(a, a), (a, a'), (a', a), (a', a')\}$.

Si se eligieran 3 niños:

Experimento aleatorio ξ_3 : Examinar tres niños ingresados al hospital y determinar si están infectados de áscaris o no.

Espacio Muestral Ω_3 :

$\Omega_3 = \{(a, a, a), (a, a, a'), (a, a', a), (a', a, a), (a, a', a'), (a', a, a'), (a', a', a), (a', a', a')\}$.

Evidentemente, de este razonamiento podemos deducir que

$$\Omega_2 = \Omega_1 \times \Omega_1.$$

$$\Omega_3 = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3.$$

$$\vdots$$

y que, en general, $\Omega_n = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$.

Es decir, un espacio muestral Ω_n está asociado a muestras de n elementos y se expresa mediante un producto cruz de un espacio muestral base Ω .

En resumen, entonces,

Experimento aleatorio

ξ_n : Examinar n niños del hospital y determinar si están infectados de áscaris o no.

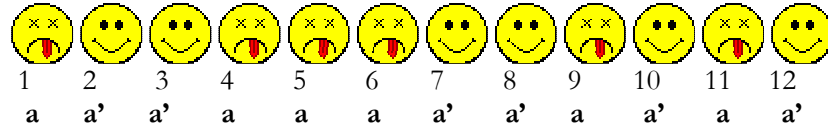
Espacio Muestral asociado

$$\Omega_n = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) / x_i = \begin{cases} a \\ a' \end{cases}, i = 1, 2, \dots, n \right\}.$$

Es decir, el espacio de muestras, en este caso, está formado por conjuntos ordenados de n niños (representados por $x_1, x_2, \dots, x_n$), en que cada uno de ellos, a su vez, es representado por un registro que indica que el niño tiene áscaris (a) o que el niño no tiene áscaris (a').

Teóricamente, si se han seleccionado muestras de $n=12$ niños, un elemento de Ω_n es de la forma, por ejemplo, $(a, a', a', a, a, a, a', a', a, a', a, a')$.

Gráficamente,



donde : el niño **tiene** áscaris (a') y : el niño **no tiene** áscaris (a).

Resp.: El espacio muestral asociado al experimento que verificará si 10 niños elegidos al azar tienen áscaris es de la forma:

$$\Omega_{10} = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_{10}) / x_i = \begin{cases} a \\ a' \end{cases}, \text{ para } i = 1, 2, \dots, 10 \right\}$$

Es decir, es un conjunto de 10-uplas ordenadas en las que cada entrada es del tipo a (si el niño elegido tiene áscaris) o bien a' (si el niño elegido no tiene áscaris).

Por análisis combinatorio se puede probar que el espacio de muestras Ω_{10} tiene $2^{10} = 1024$ 10-uplas. Es por esto que no es productivo detallar cada resultado posible de este espacio sino sólo concebir la cantidad y la cualidad de sus elementos.

Ejemplo 4.

(Aplicación en Ciencias de la Ingeniería)

Una fábrica produce tornillos que son guardados en cajas de 6 unidades para su venta. Para garantizar que las unidades de la caja están en perfectas condiciones, el fabricante va clasificando cada tornillo como defectuoso (D) o no defectuoso (D^c). Determine:

- el espacio muestral asociado al experimento que verificará si un tornillo elegido al azar de entre los producidos en un turno de trabajo, resulta defectuoso o no defectuoso.
- el espacio muestral asociado al experimento que verificará si cada tornillo del total de 6 de la caja resulta defectuoso o no defectuoso.
- el espacio muestral asociado al experimento que verificará cuántos tornillos resultan defectuosos en la caja.

Esquema de solución

a.

Paso 1. Leer cuidadosamente el enunciado del problema.

- ✓ Una fábrica produce tornillos que son guardados en cajas de 6 unidades para su venta.
- ✓ Cada tornillo es clasificado como defectuoso (d) o no defectuoso (d^c).

Paso 2. Identificar el experimento y el espacio muestral asociado.

Aquí el experimento verificará si cada tornillo del total de 6 de la caja resulta defectuoso o no defectuoso.

ξ_1 : Examinar un tornillo producido en el turno para determinar si es defectuoso o no.

El espacio muestral asociado al experimento que verificará si un tornillo resulta defectuoso o no, es de la forma

$$\Omega_1 = \{d, d^c\}$$

donde d indica que el artículo es defectuoso y d^c indica que no lo es.

Paso 3. Redactar una respuesta a la pregunta:

Por lo tanto,

Resp.: El espacio muestral para el experimento que verificará si un tornillo elegido al azar de entre los producidos, resulta defectuoso o no es $\Omega_1 = \{d, d^c\}$.

b.

Paso 1. Leer cuidadosamente el enunciado del problema.

- ✓ Una fábrica produce tornillos que son guardados en cajas de 6 unidades para su venta.
- ✓ Cada tornillo es clasificado como defectuoso (d) o no defectuoso (d^c)
- ✓ El experimento terminará cuando se hayan elegido $n = 6$ tornillos de una caja.
- ✓ Se deduce que se repetirá seis veces el experimento base de elegir **un** tornillo al azar.
Por lo tanto, si el experimento termina al cabo de 6 elecciones, será de la forma

$$\Omega_6 = \Omega_1 \times \Omega_1 \times \Omega_1 \times \Omega_1 \times \Omega_1 \times \Omega_1$$

donde $\Omega_1 = \{d, d^c\}$.

Paso 2. Identificar el experimento y el espacio muestral asociado.

De la lectura del problema se deduce que el experimento que verificará si cada tornillo del total de 6 de la caja resulta defectuoso o no defectuoso tiene asociado un espacio de muestras

$$\Omega_6 = \underbrace{\Omega_1 \times \Omega_1 \times \Omega_1 \times \Omega_1 \times \Omega_1 \times \Omega_1}_{\text{Seis veces}}$$

Aquí $\Omega_1 = \{d, d^c\}$ como en la parte a).

Con un razonamiento iterativo, semejante al del ejercicio anterior, podemos deducir qué tipo de elementos tiene Ω_6 .

Si se eligieran 2 tornillos:

$$\text{Espacio Muestral } \Omega_2 = \{(d, d), (d, d^c), (d^c, d), (d^c, d^c)\}.$$

Si se eligieran 3 tornillos (esto excede los límites):

$$\Omega_3 = \{(d, d, d), (d, d, d^c), (d, d^c, d), (d^c, d, d), (d, d^c, d^c), (d^c, d, d^c), (d^c, d^c, d), (d^c, d^c, d^c)\}$$

Con un razonamiento similar pero no detallando los resultados porque podemos recurrir al razonamiento y la notación, se obtiene

$$\Omega_6 = \{(x_1, x_2, \dots, x_6) / x_i \in \{d, d^c\}, i = 1, 2, \dots, 6\}$$

Es decir, el espacio de muestras, en este caso, está formado por conjuntos ordenados de 6 tornillos (representados por $x_1, x_2, \dots, x_n$), en que cada uno de ellos, a su vez, es representado por un registro que indica que el tornillo es defectuoso (d) o que no es defectuoso (d^c).

Teóricamente, un elemento de Ω_6 es de la forma, por ejemplo, $(d^c, d^c, d^c, d^c, d, d^c)$ en cajas de 6 tornillos.

Gráficamente,

	↑	↑	↑	↑	↑	↑
1	2	3	4	5	6	
d^c	d^c	d^c	d^c	d	d^c	

donde ↑: el tornillo es no defectuoso (d^c) y ↓: el tornillo es defectuoso (d).

Paso 3. Redactar la respuesta a la pregunta:

Finalmente,

Resp.: El espacio muestral asociado al experimento que verificará si un tornillo de la caja ha resultado defectuoso o no defectuoso es

$$\Omega_6 = \{(x_1, x_2, \dots, x_6) / x_i \in \{d, d^c\}, i = 1, 2, \dots, 6\}$$

c.

Paso 1. Leer cuidadosamente el enunciado del problema.

- ✓ El experimento no pide ahora detallar secuencias d (defectuosos) o d^c (no defectuosos) sino CONTAR cuántos tornillos resultan DEFECTUOSOS en la caja.
- ✓ Se debe pensar en el **número de defectuosos** que **podría haber** en una caja.

Paso 2. Identificar el experimento y el espacio muestral asociado.

Si el experimento consiste en verificar **cuántos tornillos resultan defectuosos** en la caja, es claro que se trata de un conteo del número de tornillos defectuosos en la caja. Es decir, en la caja **puede haber** 1 o 2 o 3 o ... o 6 tornillos defectuosos. Por lo tanto, el espacio de muestras asociado es

$$\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$$

Paso 3. Redactar la respuesta a la pregunta:

Resp.: El espacio muestral asociado al experimento que verificará cuántos tornillos resultan defectuosos en la caja es $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$.

3.1.2 Ejercicios Propuestos (Primera parte).

1. Suponga que se realiza el experimento de lanzar un dado. Determine el espacio de muestras para los siguientes objetivos de experimentación:
 - a. Observar el número aparecido en la cara superior. Resp.: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
 - b. Observar si el número aparecido es par o impar. Resp.: $\Omega = \{\text{par}, \text{impar}\}$.
 - c. Observar si el número aparecido es mayor que 4 o no.
Resp.: $\Omega = \{\text{número mayor que 4}, \text{número no mayor que 4}\}$.
 - d. Observar la suma de puntos aparecidos en las caras superior e inferior.
Resp.: $\Omega = \{7\}$ (es un experimento determinístico).
2. Suponga que se realiza el experimento de lanzar dos dados. Determine el espacio de muestras para los siguientes objetivos de experimentación:
 - a. Observar la suma de puntos aparecidos en las caras superiores.
Resp.: $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.
 - b. Observar el producto de los puntos aparecidos en las caras superiores.
Resp.: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36\}$.

- c. Observar el valor absoluto de la diferencia de puntos aparecidos en las caras superiores. Resp.: $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
3. La última novela de un autor ha tenido un gran éxito. En un grupo de 4 amigos aficionados a la lectura determine:
- a. El espacio de muestras asociado a la experiencia de establecer las secuencias que indican si cada uno de ellos ha leído (o no) la novela.
Resp.: $\Omega_6 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_i \in \{l, l^c\}, i = 1, 2, 3, 4\}$, donde l indica que el individuo leyó la novela y l^c indica que no fue así.
- b. El espacio de muestras asociado a la variable que cuenta el número de amigos que han leído la novela, entre los cuatro. Resp.: $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
4. El número de llamadas telefónicas que llegan a una central telefónica es a lo más de 10 llamadas en una hora. Como no se asegura que en la hora siguiente haya exactamente 10 llamadas el operario decide investigar en forma teórica el número de llamadas que se harán en la hora siguiente. Determine el espacio de muestras para esta experiencia. Resp.: $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, 10\}$.
5. Cierta área geográfica del planeta es golpeada por huracanes en un año determinado. Encontrar un espacio de muestras para estudiar el número de huracanes que sucederán el año siguiente. Resp.: $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, N\}$, donde N es el máximo de huracanes que pueden ocurrir en un año.
6. Un estudio de inventario en un almacén determina que, en promedio, la demanda de un artículo particular se hace 5 veces al día. Se estima que a lo más este artículo es pedido 8 veces por día. El encargado de inventario desea hacer un estudio de esta situación. Determine el espacio de muestras asociado al número de veces que este artículo es solicitado por día. Resp.: $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, 8\}$.
7. Un mecánico estudia el tiempo de duración de un rodamiento. Quiere determinar el momento en que debe cambiarlo, antes de que al estropearse pueda ser causa de un accidente. ¿Cuál es el espacio de muestras del tiempo de duración activa del rodamiento? Resp.: $\Omega = (0, T_{\text{Máx}}]$, donde $T_{\text{Máx}}$ es el tiempo máximo de duración del rodamiento.

3.1.3 Ejercicios resueltos, paso a paso (Segunda parte):

Ejemplo 5.

(Aplicación en Ciencias de la Salud)

En el ejemplo anterior considérese el espacio muestral $\Omega_2 = \{aa, a'a, aa', a'a'\}$.

Determine los siguientes sucesos:

- Al menos un niño tiene áscaris.
- Ningún niño tiene áscaris.
- Más de un niño tiene áscaris.
- Al menos un niño no tiene áscaris.

Esquema de solución

a.

Paso 1. Leer cuidadosamente el enunciado del problema.

- ✓ Se han elegido dos niños para verificar si tienen áscaris.
- ✓ Se debe averiguar el sentido que tienen las expresiones “a lo más”, “a lo menos”, “más de”, “ningún”.

Paso 2. Identificar el experimento, el espacio muestral asociado y los sucesos en estudio:

Experimento: Observar dos niños para determinar si tienen áscaris o no. El espacio muestral asociado es, por tanto,

$$\Omega_2 = \{aa, a'a, aa', a'a'\}$$

Gráficamente,

$$\Omega_2 = \{ \text{😊😊}, \text{😊😞}, \text{😞😊}, \text{😞😞} \}$$

Suceso en estudio:

El suceso A: **Al menos** un niño tiene áscaris, de Ω_2 está definido por $A = \{a'a, aa', a'a'\}$, donde se anota a si el niño tiene áscaris y a' si no tiene.

La expresión “al menos un” significa que “cuando menos uno” de los sujetos tiene áscaris: el primero, el segundo o ambos en una elección de dos.

Gráficamente,

$$A = \{ \text{😞😊}, \text{😊😞}, \text{😞😞} \}$$

Paso 3. Redactar la respuesta a la pregunta:

Resp.: El suceso A: Al menos un niño tiene áscaris, en la selección de dos niños, está dado por $A = \{aa', a'a, a'a'\}$ donde a representa a un niño que tiene áscaris y a' representa al niño que no tiene esta enfermedad.

b.

Paso 1. Leer cuidadosamente el enunciado del problema.

- ✓ Se han elegido dos niños para verificar si tienen áscaris.
- ✓ Se pide determinar el suceso “ningún niño tiene áscaris”.

Paso 2. Identificar el experimento, el espacio muestral asociado y los sucesos en estudio:

Experimento: Observar dos niños para determinar si tienen áscaris o no. El espacio muestral asociado es, por tanto,

$$\Omega_2 = \{aa, a'a, aa', a'a'\}$$

Suceso en estudio:

El suceso B: Ningún niño tiene áscaris, entre los dos elegidos, es un suceso elemental en Ω_2 y está definido por $B = \{a'a'\}$. Gráficamente,

$$B = \{ \text{😊😊} \}$$

Paso 3. Redactar la respuesta a la pregunta:

Resp.: El suceso B: Ningún niño tiene áscaris, en la selección de dos niños, está dado por $B = \{a'a'\}$ donde a' representa a un niño que **no tiene** áscaris.

c.

Paso 1. Leer cuidadosamente el enunciado del problema.

- ✓ Se han elegido dos niños para verificar si tienen áscaris.
- ✓ Se pide determinar el suceso “Más de un niño tiene áscaris”.
- ✓ “Más de uno” con áscaris, significa, en este caso de dos elegidos, que sólo nos queda la opción “dos con áscaris”.

Paso 2. Identificar el experimento, el espacio muestral asociado y los sucesos en estudio:

Experimento: Observar dos niños para determinar si tienen áscaris o no. El espacio muestral asociado es, por tanto, $\Omega_2 = \{aa, a'a, aa', a'a'\}$.

Suceso en estudio: El suceso C: Más de un niño tiene áscaris, ocurrirá toda vez que al examinar dos niños del hospital se verifique el resultado aa . Esto es, C ocurre si y sólo si al examinar los dos niños, “más de uno” presenta áscaris (dos en este caso, son más de uno), Gráficamente, $C = \{ \text{😈😈} \}$.

Paso 3. Redactar la respuesta a la pregunta:

Resp.: El suceso C: Más de un niño tiene áscaris, en la selección de dos niños, está dado por $B = \{aa\}$ donde a representa a un niño que **tiene** áscaris.

d.

Paso 1. Leer cuidadosamente el enunciado del problema.

- ✓ Se han elegido dos niños para verificar si tienen áscaris.
- ✓ Se pide determinar el suceso “Al menos un niño no tiene áscaris”.
- ✓ “Al menos un niño no tiene áscaris”, significa, en el caso de dos elegidos, que uno o más **no tienen** áscaris.

Paso 2. Identificar el experimento, el espacio muestral asociado y los sucesos en estudio:

Experimento: Observar dos niños para determinar si tienen áscaris o no. El espacio muestral asociado es, por tanto, $\Omega_2 = \{aa, a'a, aa', a'a'\}$.

Suceso en estudio: El suceso D: Al menos un niño **no tiene** áscaris, ocurrirá toda vez que al examinar dos niños del hospital se verifique el resultado $a'a$, aa' , $a'a'$, que son los casos en que uno no tiene áscaris (el primero o el segundo examinados) o dos no tienen áscaris (ambos no tienen). Es decir, el suceso buscado es $D = \{a'a, aa', a'a'\}$. Gráficamente,

$$D = \{ \text{😄😞}, \text{😞😄}, \text{😄😄} \}$$

Puede observarse que C no ocurre si ocurre el suceso contrario de C, es decir, ocurre $\{aa, a'a, aa'\}$ que es el suceso D.

Paso 3. Redactar la respuesta a la pregunta:

Resp.: El suceso D: Al menos un niño no tiene áscaris, en la selección de dos niños, está dado por $D = \{a'a, aa', a'a'\}$ donde a representa a un niño que tiene áscaris y a' representa al niño que no tiene esta enfermedad.

Nota.

Se debe observar que bajo este sentido conjuntista que se da a los sucesos, se deduce que Ω es un suceso (**suceso seguro**, siempre ocurre) y ϕ es un suceso (**suceso imposible**, nunca ocurre). Para hacer las aplicaciones prácticas de sucesos se debe conocer algunas operaciones que se pueden realizar con sucesos (la unión y la intersección conocidas ya desde la terminología de conjuntos).

Las operaciones que se pueden realizar con sucesos son semejantes a las que se realizan con conjuntos y que se conocen desde la Enseñanza Media. Existe una correspondencia entre sucesos y conjuntos:

En términos de sucesos en Ω	En términos de conjuntos en $\mathcal{U}$
Espacio muestral o suceso seguro: Ω .	Conjunto universal: $\mathcal{U}$.
Suceso: $A \subseteq \Omega$.	Subconjunto del conjunto universal: $A \subseteq \mathcal{U}$.
Suceso elemental: E .	Subconjunto del conjunto universal, que tiene un único resultado: $\{r\}$.
Suceso imposible: ϕ .	Conjunto vacío: ϕ .
Suceso contrario: A^c .	Conjunto complementario: A' .
Sucesos incompatibles o mutuamente excluyentes: $A \subseteq \Omega, B \subseteq \Omega$, tal que $A \cap B = \phi$	Conjuntos disjuntos: $A \subseteq \mathcal{U}, B \subseteq \mathcal{U}$, tal que: $A \cap B = \phi$
Unión de sucesos: $A \cup B$.	Unión de conjuntos: $A \cup B$.
Intersección de sucesos: $A \cap B$.	Intersección de conjuntos: $A \cap B$.

Ejemplo 6.

(Aplicación en Ciencias de la Salud, continuación)

En el ámbito del ejemplo anterior, considérese el espacio muestral

$$\Omega_3 = \{aaa, a'aa, aa'a, aaa', a'a'a, a'aa', aa'a', a'a'a'a'\}.$$

Gráficamente,

$$\Omega_3 = \{ \text{😊😊😊}, \text{😬😊😊}, \text{😊😬😊}, \text{😊😊😬}, \text{😬😊😊}, \text{😬😬😊}, \text{😬😊😬}, \text{😬😬😬} \}$$

Determine los siguientes sucesos de Ω_3 :

- Ningún niño tiene áscaris.
- Algún niño tiene áscaris.
- Todos los niños tienen áscaris.
- Dos niños tienen áscaris.
- Al menos dos niños tienen áscaris.
- A lo más dos niños tienen áscaris.

Esquema de solución

Paso 1. Leer cuidadosamente el enunciado del problema.

- ✓ Se han elegido TRES niños para verificar si tienen áscaris.
- ✓ Se debe **reforzar** el sentido que tienen las expresiones “a lo más”, “a lo menos”, “más de”, “ningún”, “todos”.

Paso 2. Identificar el experimento, el espacio muestral asociado y los sucesos en estudio y responder:

Experimento: Observar tres niños para determinar si tienen áscaris o no.

- Suceso en estudio:** Ningún niño tiene áscaris. Este suceso está definido por:

Gráficamente, $A_1 = \{ \text{😊😊😊} \}.$

Resp.: $A_1 = \{a'a'a'\}$

- Suceso en estudio:** Algún niño tiene áscaris. Este suceso está definido por:

Gráficamente:

$$A_2 = \{ \text{😞😞😞}, \text{😞😞😞}, \text{😞😞😞}, \text{😞😞😞}, \text{😞😞😞}, \text{😞😞😞}, \text{😞😞😞} \}$$

$$\text{Resp.: } A_2 = \{aa'a', a'aa', a'a'a, a'aa, aa'a, aaa'aaa\}.$$

- c. **Suceso en estudio:** Todos los niños tienen áscaris.

$$\text{Gráficamente, } A_3 = \{ \text{😞😞😞} \}.$$

$$\text{Resp.: } A_3 = \{aaa\}.$$

- d. **Suceso en estudio:** Dos niños tienen áscaris.

$$\text{Gráficamente, } A_4 = \{ \text{😞😞😞}, \text{😞😞😞}, \text{😞😞😞}, \text{😞😞😞} \}.$$

$$\text{Resp.: } A_4 = \{a'aa, aa'a, aaa'\}.$$

- e. **Suceso en estudio:** Al menos dos niños tienen áscaris.

$$\text{Gráficamente, } A_5 = \{ \text{😞😞😞}, \text{😞😞😞}, \text{😞😞😞}, \text{😞😞😞}, \text{😞😞😞}, \text{😞😞😞}, \text{😞😞😞} \}$$

$$\text{Resp.: } A_5 = \{a'aa, aa'a, aaa', aaa\}.$$

- f. **Suceso en estudio:** A lo más dos niños tienen áscaris.

Gráficamente,

$$A_6 = \{ \text{😞😞😞}, \text{😞😞😞}, \text{😞😞😞}, \text{😞😞😞}, \text{😞😞😞}, \text{😞😞😞}, \text{😞😞😞}, \text{😞😞😞}, \text{😞😞😞}, \text{😞😞😞}, \text{😞😞😞}, \text{😞😞😞} \}$$

$$\text{Resp.: } A_6 = \{a'a'a', aa'a', a'aa', a'a'a, a'aa, aa'a, aaa'\}$$

Nota:

$A_1 \cup A_3 = \{ \text{😞😞😞}, \text{😞😞😞} \}$ ocurre si se observan tres niños con áscaris (todos los niños observados tienen áscaris) **o bien** tres niños sin áscaris (ningún niño tiene áscaris).

$$A_2 \cup A_3 = \{ \text{😞😞😞}, \text{😞😞😞}, \text{😞😞😞}, \text{😞😞😞}, \text{😞😞😞}, \text{😞😞😞}, \text{😞😞😞}, \text{😞😞😞}, \text{😞😞😞}, \text{😞😞😞}, \text{😞😞😞}, \text{😞😞😞} \} \\ = A_3.$$

Nótese que si ocurre A_3 , entonces ocurre A_2 , pues $A_3 \subseteq A_2$. Es decir, si en la muestra todos los niños tienen áscaris (y por lo tanto ocurre A_3), entonces algún niño tiene áscaris

(ocurre A_2). Dicho de otra manera, puesto que $A_3 \subseteq A_2$, toda vez que ocurre A_3 ocurre A_2 .

Nótese también que $\bigcup_{i=1}^6 A_i = \Omega$. Es decir, $\bigcup_{i=1}^6 A_i$ **siempre ocurre**. En cada caso se sugiere que el estudiante escriba estos sucesos en términos de las secuencias de a o a' que correspondan. Por ejemplo,

$$A_1 \cup A_3 = \{\text{😊😊😊, 😞😞😞}\} = \{aaa, a'a'a'\}$$

1. A_1 y A_2 son sucesos **mutuamente excluyentes** pues $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ (es decir la ocurrencia de dos sucesos mutuamente excluyentes simultáneamente es un suceso imposible). En particular,

$$A_1 = \{\text{😊😊😊}\}$$

$$\text{y } A_2 = \{\text{😞😊😊, 😞😞😊, 😞😊😊, 😞😞😞, 😞😊😞, 😞😞😞, 😞😊😞, 😞😞😞}\}$$

son mutuamente excluyentes, pues $A_1 \cap A_2 = \{\} = \emptyset$.

2. Si $A \subseteq B$ entonces: si A ocurre, entonces también ocurre B .

Es importante que se tome conciencia de asociaciones que se realizan cuando se hace referencia a sucesos. Las asociaciones a que haremos referencia dicen relación con **un buen dominio idiomático** tanto de su sintaxis y como de su semántica. Por ejemplo, no es lo mismo decir “un niño tiene áscaris” (en el sentido de **algún niño** tiene áscaris) que “un niño tiene áscaris” (en el sentido de **sólo un niño** tiene áscaris). Sintácticamente ambas expresiones son iguales: un niño tiene áscaris, pero semánticamente ambas expresiones tienen significados muy diferentes. Debe cuidarse expresar con suma claridad a los sucesos que se quiere definir y usar para resolver una situación problemática:

En el sentido de algún niño tiene áscaris:

$$\text{Un niño tiene áscaris} = \{\text{😞😊😊, 😞😞😊, 😞😊😊, 😞😞😞, 😞😊😞, 😞😞😞, 😞😊😞, 😞😞😞, 😞😊😊, 😞😞😊}\}$$

En el sentido de sólo un niño tiene áscaris:

$$\text{“Un niño” tiene áscaris} = \text{“1” niño tiene áscaris} = \{\text{😞😊😊, 😞😞😊, 😞😊😊}\}$$

También es importante que se conozca muy bien las reglas sintácticas de la lógica y de las operaciones conjuntistas afines con las operaciones de sucesos. Los conectivos y las formas de expresión idiomáticas bien usadas contribuyen a una clara expresión de los sucesos cuya

Paso 2. Identificar el experimento, el espacio muestral asociado y los sucesos en estudio y responder:

Experimento: Observar tres niños para determinar si tienen áscaris o no.

Suceso en estudio: Para responder las preguntas y resumir en otra notación más conveniente a cada suceso, usando uniones o intersecciones, es muy conveniente definir a los siguientes:

A_1 : El **primer** niño observado **tiene** áscaris.

A_1^c : El **primer** niño observado **no tiene** áscaris.

A_2 : El **segundo** niño observado **tiene** áscaris.

A_2^c : El **segundo** niño observado **no tiene** áscaris.

A_3 : El **tercer** niño observado **tiene** áscaris.

A_3^c : El **tercer** niño observado **no tiene** áscaris.

Así, podemos ahora razonar como sigue:

- a. **Se pide:** Escribir el suceso “Uno y sólo un niño de los tres examinados tiene áscaris”.

Este suceso debe tener los resultados    (tiene áscaris el primero) **o bien**    (tiene áscaris el segundo) **o bien**    (tiene áscaris el tercero). En cada caso se ha utilizado una forma gráfica para simplificar la imagen mental de estos resultados. En cada uno hay “uno y sólo un” niño con áscaris.

En terminología de sucesos se puede escribir

$(A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c)$ en lugar de   
El primero tiene áscaris,
y el segundo no y el tercero no

$(A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c)$ en lugar de   
El primero no tiene áscaris
y el segundo sí y el tercero no

$(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3)$ en lugar de   
El primero no tiene áscaris
y el segundo no y el tercero sí

Las observaciones sucesivas generan una escritura con intersecciones pero las disyuntivas (con el conector “o”) se expresan con uniones, de la siguiente manera:

$$(A_1^c \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3^c)$$

Lo que equivale a   ,   ,   . Por lo tanto,

Resp.: Usando el álgebra de sucesos, el suceso “Uno y sólo un niño de los tres examinados tiene áscaris”, se escribe como

$$(A_1^c \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3^c)$$

- b. **Se pide:** Escribir el suceso “Sólo el tercer niño examinado tiene áscaris”.

Este suceso debe tener los resultados 😊😊😞 (tiene áscaris sólo el tercero) **y no hay más resultados posibles.**

En terminología de sucesos se puede escribir

$$(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3)$$

El primero no tiene áscaris
y el segundo no y el tercero sí

en lugar de



Las observaciones sucesivas generan una escritura con intersecciones:

$$(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c)$$

Lo que equivale a {😊😊😞}. Por lo tanto,

Resp.: Usando el álgebra de sucesos, el suceso “Sólo el tercer niño examinado tiene áscaris”, se escribe como $(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c)$.

- c. Siguiendo la misma forma de razonamiento, se deduce que el suceso “Dos o más niños examinados tienen áscaris”, se refiere a 😊😞😞 o bien 😞😊😞 o bien 😞😞😊 o bien 😞😞😞. En terminología de conjuntos se escribirá, entonces

$$(A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3)$$

Es decir, {😊😞😞, 😞😊😞, 😞😞😊}, o bien

$$\{a, a'a', a'aa', a'a'a\}$$

Resp.: Usando terminología de sucesos, el suceso “Dos o más niños examinados tienen áscaris”, se escribe como

$$(A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3)$$

- d. Se deja a investigación probar que “Ningún niño examinado tiene áscaris”, en terminología de sucesos se puede escribir como $(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \{aaa\}$. Es decir, {😊😊😊}.

Resp.: Usando terminología de sucesos, el suceso “Ningún niño examinado tiene áscaris”, se escribe como

3.1.4 Ejercicios Propuestos (Segunda parte).

1. En los espacios de muestra siguientes, escriba, en terminología de sucesos, los sucesos que se indica:

a. $\Omega_1 = \Omega_0 \times \Omega_0 = \{00, 01, 10, 11\}$, $\Omega_0 = \{0, 1\}$. Se Ω_1 se define

A_1 : 1 en primer lugar, A_2 : 1 en segundo lugar

Determine los siguientes sucesos indicando los resultados que contiene:

i) 1 en primer lugar. Resp.: A_1 . $A_1 = \{10, 11\}$.

ii) 1 en segundo lugar. Resp.: A_2 , $A_2 = \{01, 11\}$.

iii) 1 en el primer lugar y 1 en el segundo lugar. Resp.: $A_1 \cap A_2$, $A_1 \cap A_2 = \{11\}$.

b. $\Omega_1 = \{000, 001, 010, 100, 011, 101, 110, 111\}$. Se define

A_1 : 1 en primer lugar, A_2 : 1 en segundo lugar, A_3 : 1 en tercer lugar.

Determine los siguientes sucesos indicando los resultados que contiene:

i) 1 en primer lugar. Resp.: $A_1 = \{100, 101, 110, 111\}$.

ii) 1 en primer lugar y 1 en tercer lugar. Resp.: $A_1 \cap A_3 = \{101, 111\}$.

iii) 1 en el primer lugar o 1 en el segundo lugar.

Resp.: $A_1 \cup A_2 = \{101, 110, 100, 111, 010, 011, 001\}$.

2. Sean A , B , C tres sucesos en un espacio de muestras Ω . Escriba los siguientes sucesos:

a. Ocurren A o B , pero no C . Resp.: $(A \cup B) \cap C^c$.

b. No ocurren A y no ocurre B . Resp.: $A^c \cap B^c$.

c. De entre A y B , ocurre al menos A . Resp.: $(A \cap B) \cup (A \cap B^c)$ o, simplemente, A (¿por qué?).

d. De los tres sucesos dados sólo ocurre B . Resp.: $(A^c \cap B \cap C^c)$, si no importa el orden en que ocurran estos sucesos. Si el orden importa, el suceso pedido será $(B \cap A^c \cap C^c) \cup (B \cap C^c \cap A^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (C^c \cap B \cap A^c) \cup (A^c \cap C^c \cap B) \cup (C^c \cap A^c \cap B)$.

e. No ocurre: A o C . Resp.: $(A \cup C)^c$.

f. Al menos ocurre uno de los sucesos A , B , C . Resp.: $A \cup B \cup C$.

3. (Aplicación en Ciencias de la Ingeniería) Tornillos de precisión son guardados en cajas de cuatro tornillos para la venta. Si T_j : el tornillo j es defectuoso, para $j = 1, 2, 3, 4$, determinar en terminología de sucesos los siguientes:
- Más de dos tornillos son defectuosos. Resp.:

$$(T_1^c \cap T_2 \cap T_3 \cap T_4) \cup (T_1 \cap T_2^c \cap T_3 \cap T_4) \cup (T_1 \cap T_2 \cap T_3^c \cap T_4) \cup (T_1 \cap T_2 \cap T_3 \cap T_4^c) \cup (T_1 \cap T_2 \cap T_3 \cap T_4)$$
 - Ningún tornillo es defectuoso.
 Resp.: $(T_1^c \cap T_2^c \cap T_3^c \cap T_4^c) = (T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4)^c$
 - A lo más uno es defectuoso.
 Resp.: $(T_1 \cap T_2^c \cap T_3^c \cap T_4^c) \cup (T_1^c \cap T_2 \cap T_3^c \cap T_4^c) \cup (T_1^c \cap T_2^c \cap T_3 \cap T_4^c) \cup (T_1^c \cap T_2^c \cap T_3^c \cap T_4)$
4. Se contrata una firma de ingenieros agricultores para que realicen un estudio de tres ríos de cierta zona, con la intención de establecer una crianza de truchas.
- Determine el espacio muestral Ω , con las determinaciones a_i : El río i es apto para la crianza de truchas, $i = 1, 2, 3$; a_i^c : El río i no es apto para la crianza de truchas, $i = 1, 2, 3$.
 Resp.: $\Omega = \{a_1 a_2 a_3, a_1 a_2 a_3^c, a_1 a_2^c a_3, a_1^c a_2 a_3, a_1 a_2^c a_3^c, a_1^c a_2 a_3^c, a_1^c a_2^c a_3, a_1^c a_2^c a_3^c\}$
 - Determine el suceso E : Al menos dos ríos son aptos para la crianza de truchas.
 Resp.: $E = \{a_1 a_2 a_3^c, a_1 a_2^c a_3, a_1^c a_2 a_3, a_1 a_2 a_3\}$. Si A_i : El río i es apto para la crianza de truchas, $i = 1, 2, 3$, entonces

$$E = (A_1 \cap A_2 \cap A_3^c) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3) \cup A_1 \cap A_2 \cap A_3$$
5. Para dos puestos de trabajo se presentan dos mujeres y dos hombres. Uno de los puestos es de Jefe de Operaciones y el otro de Operario. Para el puesto de Jefe de Operaciones se elige por una selección estricta sólo un postulante. De los tres restantes se elige al azar uno para el puesto de Operario. Usando la notación $M_2 F_1$, por ejemplo, para denotar el suceso elemental “el primer puesto se cubre con el segundo aspirante hombre y el segundo puesto se cubre con la primera aspirante mujer:
- Liste los elementos del espacio muestral Ω .
 - Determine los elementos del suceso A : El puesto de Operario se cubre con un aspirante hombre.
 - Determine los elementos del suceso B : Exactamente uno de los dos puestos se cubre con un aspirante mujer.
 - Determine los elementos del suceso C : Ningún puesto se cubre con un aspirante hombre.
 - Determine los elementos del suceso $A \cap B$ ¿cómo lo nombraría?
 - Determine los elementos del suceso $A \cup B$ ¿cómo lo nombraría?

6. Considere el espacio muestral

$$\Omega = \{\text{cobre, sodio, nitrógeno, potasio, uranio, oxígeno, cinc}\}$$

Sean los sucesos: $A = \{\text{cobre, sodio, cinc}\}$, $B = \{\text{sodio, nitrógeno, potasio}\}$, $C = \{\text{oxígeno}\}$.

Liste los elementos de los sucesos siguientes:

- a. A^c .
 - b. $A \cup C$.
 - c. $(A \cap B^c) \cup C^c$
 - d. $B^c \cap C^c$.
 - e. $A \cap B \cap C$.
 - f. $(A^c \cup B^c) \cap (A^c \cap C)$.
7. En un período de 24 horas, en un momento X, un interruptor se pone en la posición "encendido". Posteriormente en un momento Y (aún en el período de 24 horas) el interruptor se pone en la posición apagado. Suponga que X e Y se miden en horas en el eje de tiempo con el comienzo del período como origen. El experimento consta del par de números (X,Y).
- a. Encuentre un espacio muestral asociado a este experimento.
 - b. Describa los siguientes sucesos:
 - i. El circuito funciona durante una hora o menos.
 - ii. El circuito funciona durante un tiempo Z.
 - iii. El circuito comienza a funcionar antes de t_1 y deja de funcionar después de t_2 .

3.2 Probabilidad: definición y propiedades

Palabras Clave: Probabilidad, axiomas de probabilidad, equiprobabilidad, distribución de probabilidad.

Resumen de conceptos y propiedades:

- ✓ Al repetir un número determinado de veces un experimento aleatorio, se puede calcular la frecuencia relativa de ocurrencia de sucesos. Por lo tanto se obtiene una **distribución empírica de frecuencias relativas**.
- ✓ Si el experimento se repite nuevamente el mismo número de veces es de esperar que se mantengan los valores de las frecuencias relativas de ocurrencia de los sucesos de interés y,

en consecuencia, su **distribución empírica**. Si se repitiera la experiencia indefinidamente es deseable que si hay una convergencia hacia valores determinados de ocurrencia de los sucesos de interés, éstos puedan identificarse perfectamente.

- ✓ Para evitar tantas dudas se opta por conceptualizar un modelo matemático estructurado a partir de axiomas (basados en las observaciones experimentales con cierta variabilidad), desde los cuales se pueden deducir teoremas, que aunque siendo verdaderos nada demuestran acerca del problema real, pueden, eso sí, permitir una mejor comprensión e interpretación de la ley que rige la ocurrencia de sucesos en el problema real.
- ✓ Las **medidas de ocurrencia de sucesos**, llamadas **medidas de probabilidad**, estarán definidas por funciones real valoradas que, verificando ciertas condiciones, permitirán discriminar entre las posibilidades de ocurrencia de éstos.
- ✓ Para construir una medida de probabilidad se usará el conjunto potencia del espacio muestral Ω , que denotaremos por $Potencia(\Omega)$, denotado por $\mathcal{A}$ y definido, en forma intuitiva, como el conjunto de todos los subconjuntos del espacio muestral, en el cual se encuentran los sucesos, cuya ocurrencia se mide con una **medida de probabilidad**.
- ✓ El número real $P(A)$ se le denomina “**probabilidad del suceso A**” y la terna $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ se denomina **Espacio de Probabilidad**.
- ✓ La **medida de probabilidad sobre Ω** es una función de la forma $P: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$, que verifica tres condiciones:

Axioma 1. $P(A) \geq 0$, para todo $A \in \mathcal{A}$ (la probabilidad de un suceso NUNCA es negativa).

Axioma 2. Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ es una colección de **sucesos mutuamente excluyentes** de $\mathcal{A}$, entonces,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \text{ para } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ cuando } i \neq j.$$

Este axioma dice que si se calcula probabilidad a una unión de sucesos que no tienen resultados en común, se obtiene el mismo valor que si se sumara las probabilidades de cada suceso.

Axioma 3. $P(\Omega) = 1$ (la probabilidad del espacio de muestras, suceso seguro, vale 1)

- ✓ Si A, B y C son sucesos en $\mathcal{A}$, entonces son **propiedades** de la medida de probabilidad P :

1. $P(\emptyset) = 0$.

2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

3. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

4. Si $A \subseteq B$, entonces:

- a) $P(A) \leq P(B)$.
- b) $P(B - A) = P(B \cap A^c) = P(B) - P(A)$.

5. $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.

6. $0 \leq P(A) \leq 1$, para todo suceso A .

7. $P(A^c) = 1 - P(A)$.

- ✓ Un **espacio de muestras finito o infinito numerable** es un conjunto contable. Sus elementos pueden ser puestos en correspondencia con un subconjunto de números naturales
- ✓ Un **espacio de muestras infinito** es un conjunto infinito no numerable.
- ✓ Un espacio de muestras finito Ω es **equiprobable** si cada suceso elemental de Ω tiene la misma probabilidad de ocurrir. En tal caso, si $\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ es un espacio de muestras finito equiprobable y A es un suceso en Ω , entonces puede probarse que:

1. $P(\{w_i\}) = \frac{1}{\#\Omega} = \frac{1}{n}$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

2. $P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$, es decir si A tiene r elementos y Ω tiene n entonces $P(A) = \frac{r}{n}$

3.2.1 Ejercicios resueltos, paso a paso:

Ejemplo 1.

(Aplicación en Ciencias de la Salud)

(**Caso finito equiprobable**) Un médico ha recabado información en dos consultorios, A y B, para observar el número de pacientes fumadores y no fumadores atendidos en cada uno de ellos. Obtuvo la tabla adyacente.

CONSULTORIO			
Hábito de fumar	A	B	Total
Fumadores	5	6	11
No fumadores	4	3	7
Total	9	9	18

Calcular la probabilidad de que un paciente elegido al azar sea fumador o haya sido atendido en el consultorio A.

Esquema de solución

Paso 1. Leer cuidadosamente el enunciado del problema.

Paso 2. Identificar los sucesos y los de probabilidad que hay que calcular.

Experimento: Se selecciona aleatoriamente un paciente, entre los 18 del espacio, para observar si es atendido en el consultorio A o es fumador. En este contexto se puede considerar $\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_{18}\}$, $P: \text{Potencia}(\Omega) = \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$P(\{w_i\}) = \frac{1}{18}, \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, 18.$$

Se pide:

Calcular la **probabilidad** de que un paciente elegido al azar **sea fumador o haya sido atendido en el consultorio A**

Con base en el párrafo anterior se definen los sucesos

$$F = \{\text{el paciente es fumador}\}$$

$$A = \{\text{el paciente es atendido en el consultorio A}\}$$

Con esta definición se da una forma notacional adecuada al cálculo que se pide realizar, observando que estos sucesos están relacionados por el conectivo lógico idiomático “o”:

$$\text{sea fumador o haya sido atendido en el consultorio A} \quad \leftrightarrow \quad F \cup A$$

Notacionalmente la probabilidad pedida es: $P(A \cup D)$.

Paso 3. Calcular la probabilidad pedida:

$$\text{Se tiene } P(A \cup D) = P(A) + P(D) + P(A \cap D) = \frac{9}{18} + \frac{11}{18} - \frac{5}{18} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}.$$

Paso 4. Responder a la pregunta planteada:

Resp.: La probabilidad de que un paciente elegido al azar sea fumador o haya sido atendido en el consultorio A es $\frac{5}{6}$.

Ejemplo 2.

(Aplicación en Ciencias Ambientales)

(Caso finito no equiprobable) Un habitante de un sector de la ciudad puede estar expuesto sólo a tres tipos de contaminación que han sido estudiadas por el ministerio de salud:

C_1 : Contaminación por plomo. ; C_2 : Contaminación por arsénico.

C_3 : Contaminación por monóxido de carbono.

Se ha observado que la contaminación C_2 ocurre dos veces más a menudo que la contaminación C_1 y tantas veces como la contaminación C_3 .

¿Cuál es la probabilidad de que un habitante de ese sector de la ciudad no sufra contaminación por plomo?

Esquema de solución

Paso 1. Leer cuidadosamente el enunciado del problema para identificar experimento, espacio de muestra, sucesos y la pregunta.

Paso 2. Identificar los sucesos y la probabilidad que hay que calcular:

Experimento: Se observa la contaminación por plomo, arsénico o monóxido de carbono para averiguar la posibilidad de que al escoger a una persona en este ambiente de contaminación pueda no estar contaminada por plomo.

Espacio de muestras:

$$\Omega = \{C_1, C_2, C_3\}$$

Probabilidad: $P: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ donde P , a su vez, se define como sigue

$$P(\{C_2\}) = 2P(\{C_1\}) = P(\{C_3\}) \quad (*)$$

Debe cumplirse que $P(\{C_1\}) + P(\{C_2\}) + P(\{C_3\}) = 1$ (

Reemplazando (*) en esta última ecuación y resolviendo se obtiene

$$P(\{C_1\}) = \frac{1}{5} \quad ; \quad P(\{C_2\}) = \frac{2}{5} \quad ; \quad P(\{C_3\}) = \frac{2}{5}$$

Paso 3. Reconocer sucesos, expresar en la notación adecuada lo que se pide responder y calcular:

La probabilidad de que un habitante de la ciudad **no sufra contaminación por plomo** es

$$P(\{C_2\}) + P(\{C_3\}) = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$$

Paso 4. Responder a la pregunta:

Resp.: La probabilidad de que un habitante de ese sector de la ciudad no sufra contaminación por plomo es de $\frac{4}{5}$

3.2.2 Ejercicios Propuestos.

- Sean A , B , y C tres sucesos asociados con un experimento. Expresar las siguientes proposiciones verbales en notación de conjuntos:
 - Al menos uno de los sucesos ocurre.
 - Exactamente uno de los sucesos ocurre.
 - Exactamente dos de los sucesos ocurre.
 - No ocurren más de dos sucesos simultáneamente.
- Demostrar que $P[(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)] = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$.
- Suponga que A y B son dos sucesos para los cuales $P(A) = x$, $P(A \cap B) = z$. Expresar cada una de las probabilidades siguientes en términos de x , y , z :
 - $P(A^c \cup B^c)$.
 - $P(A^c \cap B)$.
 - $P(A^c \cup B)$.
 - $P(A^c \cap B^c)$.
- Suponga que A , B y C son sucesos tales que

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B) = P(C) = \frac{1}{4} \\ P(A \cap B) &= P(B \cap C) = 0 \\ P(A \cap C) &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Calcular la probabilidad de que al menos uno de los sucesos A , B o C ocurra.

- Se lanza un par de dados y se anotan los resultados (X_1, X_2) , donde X_i es el resultado del i -ésimo dado ($i = 1, 2$). Sean los sucesos siguientes:

$$A = \{(x_1, x_2) / x_1 + x_2 \geq 10\} ; B = \{(x_1, x_2) / x_1 = 5\} ; C = \{(x_1, x_2) / x_1 = 5 \text{ o } x_2 = 5\}$$

- a. Calcular las siguientes probabilidades: i) $P_B(A)$ ii. $P_C(A)$.
 - b. ¿Son A y B independientes? Justifique
 - c. ¿Son A y B mutuamente excluyentes? Justifique.
6. (Aplicación en Ciencias de la Ingeniería) En una producción de artículos electrónicos, el 25% de los artículos presenta fallas de transistores, el 30% presenta fallas de fusibles y el 10% presenta ambas fallas. ¿Cuál es la probabilidad de que un artículo elegido al azar de esa producción presente:
- a. al menos una de las dos fallas?
 - b. falla de transistores pero no de fusibles?
 - c. falla de fusibles si no presenta falla en los transistores?
 - d. falla de transistores si presenta al menos un tipo de falla?
7. (Aplicación en Ciencias Administrativas) En una edición de enero de 1998 de una revista de computación, se reportaba que según una encuesta llevada a cabo por esta revista, el 40% de sus suscriptores prefería regularmente los equipos computacionales IBM, el 32% de sus suscriptores prefería regularmente los equipos computacionales OLIVETTI y que el 11% de sus suscriptores prefería regularmente ambos equipos. ¿Cuál es la probabilidad de que un suscriptor elegido al azar:
- a. Prefiera al menos uno de los equipos computacionales.
 - b. Prefiera el equipo IBM, pero no el equipo OLIVETTI.
 - c. Prefiera el equipo OLIVETTI, si no prefiere el equipo IBM?
 - d. Prefiera el equipo IBM, si prefiere al menos uno de los equipos?
8. (Aplicación en Ciencias de la Ingeniería) Cierta tipo de motor eléctrico falla por obstrucción de los rodamientos, por combustión del embobinado o por desgaste de las escobillas. Suponga que la probabilidad de la obstrucción es el doble de la combustión, la cual es cuatro veces más probable que el desgaste de las escobillas. ¿Cuál es la probabilidad de que el fallo se produzca por cada uno de esos tres mecanismos?
9. (Aplicación en Ciencias de la Ingeniería) En un período de 24 horas, en un momento X , un interruptor se pone en la posición "encendido". Posteriormente en un momento Y (aún en el período de 24 horas) el interruptor se pone en la posición apagado. Suponga que X e Y se miden en horas en el eje de tiempo con el comienzo del período como origen. El experimento consta del par de números (X, Y) .
- a. Encuentre un espacio muestral asociado a este experimento.
 - b. Describa los siguientes sucesos:
 - i. El circuito funciona durante una hora o menos.
 - ii. El circuito funciona durante un tiempo Z .
 - iii. El circuito comienza a funcionar antes de t_1 y deja de funcionar después de t_2 .
10. Los artículos comerciales de una línea de producción se clasifican en defectuosos (D) y no defectuosos (N). Se observan los artículos y se anota su condición. Este proceso se continúa hasta

que se produzcan dos artículos defectuosos consecutivos o se hayan observado cuatro artículos. Describa un espacio muestral para este experimento.

3.3. Probabilidad condicional e independencia de sucesos.

Palabras Clave: Probabilidad condicional, independencia de sucesos, distribución de probabilidad, sucesos independientes, partición del espacio de muestras, probabilidad

Resumen de conceptos y propiedades:

- ✓ Hay situaciones en las cuales la información aportada por la ocurrencia de un suceso es importante para calcular la probabilidad de ocurrencia de otros sucesos del contexto de estudio. Éste es el caso de la **probabilidad condicionada** cuyo valor **depende de la ocurrencia o no de un suceso condicionante**.
- ✓ Sea $P: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ una probabilidad en el espacio $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ asociado a un experimento ξ . Sea B un suceso en Ω tal que $P(B) > 0$, entonces se llama medida de probabilidad condicional del suceso A dado que ha ocurrido el suceso B a la medida P_B tal que

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- ✓ $P_A(B)$ se lee “**probabilidad del suceso A dado que ha ocurrido el suceso B** ” o, simplemente, “probabilidad de A dado B ”.
- ✓ El suceso condicionante B debe tener una probabilidad cierta de ocurrir, por eso la exigencia $P(B) > 0$.
- ✓ La probabilidad condicional $P_B(\bullet)$ o, según la notación de distintos autores, $P_B(\bullet|B)$ se define en un espacio de probabilidad de todos los sucesos A escritos en la forma $A \cap B$ (interseccionados con el suceso condicionante B), convirtiendo al suceso B en un **espacio de muestras restringido**.
- ✓ Si $B = \Omega$, entonces $P_B = P_\Omega = P$ (la probabilidad que hemos estado usando y que está condicionada a la ocurrencia del espacio muestral Ω).

✓ En un espacio muestral finito equiprobable se tendrá $P_B(A) = \frac{\#(A \cap B)}{\#B}$.

✓ Debe observarse que

1. $B \subset A \Rightarrow P_B(A) = 1$.

Es decir, si el suceso B ocurre y está incluido en el suceso A , entonces la probabilidad de que ocurra A **dado que ha ocurrido B** es 1.

2. Si $A \cap B = \emptyset$ entonces $P_B(A) = 0$ (¿puede explicar esto?).

3. $P_B(B) = 1$ (¿cómo se explica?).

✓ De la definición de probabilidad condicional se desprende que cuando se conocen la probabilidad condicional $P_B(A)$ y la probabilidad del condicionante, $P(B)$, se puede obtener el valor de la probabilidad del suceso $A \cap B$ de la siguiente manera:

$$P(A \cap B) = P(B)P_B(A)$$

Análogamente, si se conocen $P(A) > 0$ y $P_A(B)$: $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$.

✓ Los sucesos A y B se dicen independientes si y sólo si se verifica $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

✓ Hay situaciones en las que resulta ventajoso identificar sucesos incompatibles (o **mutuamente excluyentes**) cuya unión sea el espacio de muestras, Ω , para que con referencia a ellos se pueda calcular probabilidades de otros sucesos de interés. Para tal caso, se llama **partición de Ω en el espacio de probabilidad** $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ asociado a un experimento a una colección $A_1, A_2, \dots, A_k$ de sucesos en Ω tales que:

1. $A_1, A_2, \dots, A_k$ son sucesos mutuamente excluyentes (su intersección es $\emptyset$).

2. $P(A_i) > 0$, para todo $i = 1, 2, \dots, k$.

3. $\bigcup_{i=1}^k A_i = \Omega$.

✓ **Regla multiplicativa:**

Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ son sucesos en Ω y $P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) > 0$, entonces

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdot \dots \cdot P_{\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i}(A_n)$$

Este resultado dice que la probabilidad de que ocurran simultáneamente n sucesos es igual al producto de las probabilidades de que **ocurra el primero**, **ocurra el segundo dado que ha ocurrido el primero**, **ocurra el tercero dado que han ocurrido el primero y el segundo**, ..., **ocurra el n -ésimo dado que han ocurrido todos los anteriores**.

✓ **Probabilidad Total:**

Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ es partición de Ω y B un suceso, entonces

$$P(B) = P(A_1)P_{A_1}(B) + P(A_2)P_{A_2}(B) + \dots + P(A_n)P_{A_n}(B)$$

Este resultado dice que si el espacio de muestras está particionado, puede calcular la probabilidad del suceso como la suma de las probabilidades del suceso intersectado con los sucesos de la partición.

✓ **Teorema de Bayes:**

Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ es partición de Ω y B un suceso tal que $P(B) > 0$, entonces

$$P_B(A_j) = \frac{P(B \cap A_j)}{P(B)} = \frac{P(A_j)P_{A_j}(B)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P_{A_i}(B)}$$

Este resultado dice que si el espacio de muestras está particionado, la probabilidad de un suceso de la partición dado que ha ocurrido un suceso del espacio se puede calcular como el cociente entre la probabilidad de la intersección del suceso de la partición y el suceso del espacio, y la probabilidad del suceso del espacio.

3.3.1 Ejercicios resueltos, paso a paso:

Ejemplo 1.

(Aplicación en Ciencias de la Salud)

En una caja que contiene 20 frascos de remedios se observa que 8 son de jarabe para la tos (de los cuales 5 han caducado) y 12 son de jarabe para la digestión (9 han caducado).

- Si un frasco elegido al azar es de jarabe para la digestión. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un frasco con contenido caducado?
- Son independientes los sucesos “el frasco elegido es de jarabe para la digestión” y “El frasco tiene su contenido caducado”?

Esquema de solución

Paso 1. Leer cuidadosamente el enunciado del problema para identificar experimento, espacio de muestra, sucesos y la pregunta.

Paso 2. Identificar los sucesos y dejar expresada la probabilidad que hay que calcular.

Sean M : El frasco es de jarabe para la tos.
 F : El frasco es de jarabe para la digestión.
 B : El contenido del frasco ha caducado.

De la información dada por el enunciado se deduce:

$$20 \text{ frascos } (\Omega) \begin{cases} 8 \text{ para tos } (M) \begin{cases} 3 \text{ buen estado } (B^c) \\ 5 \text{ caducados } (B) \end{cases} \\ 12 \text{ para digestión } (F) \begin{cases} 3 \text{ buen estado } (B^c) \\ 9 \text{ caducados } (B) \end{cases} \end{cases}$$

Y también que

$$P(M) = \frac{8}{20}, P(F) = \frac{12}{20},$$

$$P_M(B^c) = \frac{3}{8}, P_M(B) = \frac{5}{8},$$

$$P_F(B^c) = \frac{3}{12}, P_F(B) = \frac{9}{12}.$$

Se pide: Calcular $P_F(B)$ y determinar si los sucesos F y B son independientes.

Paso 3. Responder a la pregunta:

Resp.:

- Si un frasco elegido al azar es de jarabe para la digestión, entonces la probabilidad de que sea un frasco con contenido caducado es de $\frac{9}{12}$.
- Los sucesos F y B **no son independientes** pues $P(F \cap B) = \frac{9}{20} = 0.45$ y

$$P(F)P(B) = \frac{12}{20} \cdot \frac{14}{20} = 0.42, \text{ luego } P(F \cap B) \neq P(F)P(B).$$

Ejemplo 2.

(Aplicación en Ciencias de la Salud)

En un edificio hay 20 personas, 8 de las cuales presentan síntomas de estar infectados con un cierto virus.

Para declarar cuarentena en el edificio se examinan sucesivamente **sin reemplazo** 3 de estas personas y si ninguna de ellas presenta síntomas no se declara cuarentena ¿Cuál será la probabilidad de no declarar cuarentena en el edificio?

Esquema de solución

Paso 1. Leer cuidadosamente el enunciado del problema para identificar experimento, espacio de muestra, sucesos y la pregunta.

- ✓ **Experimento:** Se seleccionan 3 personas de entre 20, sin reemplazo, y si ninguna está infectada con el virus no se declara cuarentena en el edificio.
- ✓ **# Ω = 20.**
- ✓ **Probabilidad:** Suponiendo que en cada elección los sujetos tienen la misma probabilidad de ser elegidos y que después de cada elección el espacio disminuye en un sujeto porque la elección no permite el reemplazo (condición del problema), se define la probabilidad como

$$P(A_1) = \frac{8}{20} \quad ; \quad P_{A_1}(A_2) = \frac{7}{19} \text{ (sin reemplazo)} \quad ; \quad P_{A_1 \cap A_2}(A_3) = \frac{6}{18}$$

A_i : la i -ésima persona examinada presenta síntomas de infección con el virus, $i = 1, 2, 3$.

Paso 2. Identificar los sucesos y dejar expresada la probabilidad que se pide calcular.

Se define el suceso Z : se declara cuarentena.

Entonces, $Z^C = A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C$. Es decir, “no se declara cuarentena” es equivalente a que “la primera, la segunda y la tercera persona examinada no presenten síntomas de infección con el virus”.

Se pide calcular: $P(Z) = 1 - P(Z^C)$.

Paso 3. Calcular la probabilidad pedida aplicando propiedades, si es ventajoso, y responder:

Aplicando probabilidad:

$$P(Z^C) = P(A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C) = P(A_1^C)P_{A_1^C}(A_2^C)P_{A_1^C \cap A_2^C}(A_3^C)$$

Observando que, en base a la definición de la probabilidad asociada dada en el paso 1, se tiene:

$$P(A_1^C) = \frac{12}{20} \quad ; \quad P_{A_1^C}(A_2^C) = \frac{11}{19} \text{ (sin reemplazo)} \quad ; \quad P_{A_1^C \cap A_2^C}(A_3^C) = \frac{10}{18}$$

Por lo tanto,

$$P(Z^C) = P(A_1^C) P_{A_1^C}(A_2^C) P_{A_1^C \cap A_2^C}(A_3^C) = \frac{12}{20} \cdot \frac{11}{19} \cdot \frac{10}{18} = 0.192982 \approx 0.1930$$

Resp.: Existe un 19.3 % de posibilidades de no declarar cuarentena.

Ejemplo 3.

(Aplicación en Ciencias de la Salud)

En un hospital pediátrico de acuerdo al estado nutricional se sabe que el 60% de los niños son normales, el 30% son desnutridos y el 10% restante son obesos.

El 40% de los normales tiene menos de 10 años, en los desnutridos el 60% tiene menos de 10 años y en los obesos el 80% tiene más de 10 años.

El directorio desea conocer cuál será el porcentaje de niños con menos de 10 años en el hospital.

Esquema de solución

Paso 1. Leer cuidadosamente el enunciado del problema para identificar experimento, espacio de muestra, sucesos y la pregunta.

Experimento: Se clasifican niños según su estado nutricional (Desnutridos, normales y obesos) y según su edad (menos de 10 años, 10 años o más) se quiere con la información porcentual obtenida, saber **cuál es el porcentaje de niños con menos de 10 años.**

Espacio de muestras: Conjunto de niños del hospital pediátrico.

Probabilidad: Valores definidos sobre sucesos del espacio relacionados con el estado nutricional o la edad (desde el punto de vista de las clasificaciones mencionadas).

$$\text{Hospital pediátrico} \left\{ \begin{array}{l} \text{Desnutridos (30\%)} \left\{ \begin{array}{l} \text{Menos de 10 años (60\%)} \\ \text{10 años o más (40\%)} \end{array} \right. \\ \text{Normales (60\%)} \left\{ \begin{array}{l} \text{Menos de 10 años (40\%)} \\ \text{10 años o más (60\%)} \end{array} \right. \\ \text{Obesos (10\%)} \left\{ \begin{array}{l} \text{Menos de 10 años (80\%)} \\ \text{10 años o más (20\%)} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Los valores de probabilidad observados corresponden a los porcentajes experimentales:

$$P(D) = 0.30 \quad ; \quad P(N) = 0.60 \quad ; \quad P(O) = 0.10$$

$$P_D(M_{10}^-) = 0.60; \quad P_D(M_{10}^+) = 0.40$$

$$P_N(M_{10}^-) = 0.40; \quad P_N(M_{10}^+) = 0.60$$

$$P_O(M_{10}^-) = 0.80; \quad P_O(M_{10}^+) = 0.20$$

Aquí se ha definido los siguientes sucesos del espacio:

D : El niño es desnutrido.

N : El niño es normal.

O : El niño es obeso.

M_{10}^- : El niño tiene menos de 10 años.

M_{10}^+ : El niño tiene 10 años o más.

Se pide: $P(M_{10}^-)$ en el hospital (Ω).

Paso 2. Calcular la probabilidad pedida aplicando propiedades, si es ventajoso, y responder:

El cálculo de la probabilidad de que un niño sea de menos de 10 años debe contemplar el hecho de que el niño pueda ser desnutrido (D), normal (N) u obeso (O). Por tanto, en términos de la partición del espacio en Desnutridos, Normales y Obesos, podemos escribir:

$$M_{10}^- = (D \cap M_{10}^-) \cup (N \cap M_{10}^-) \cup (O \cap M_{10}^-)$$

Lo que se interpreta como:

Considerar un “niño menor de 10 años” es lo mismo que considerar:

que sea **D**esnutrido **y** **M**enor de 10 años ($D \cap M_{10}^-$),

o bien que sea Normal y Menor de 10 años ($N \cap M_{10}^-$),

o bien que sea Obeso y Menor de 10 años ($O \cap M_{10}^-$),

Obsérvese que el conectivo lingüístico “y” está asociado con la operación conjuntista “ $\cap$ ” y que el conectivo lingüístico “o bien” está asociado con la operación conjuntista “ $\cup$ ”.

La expresión “o bien” tiene el sentido de expresar un “o” no incluyente, es decir, que ocurre una cosa o la otra PERO NO AMBAS. Esto guarda relación con los sucesos mutuamente excluyentes: $D \cap M_{10}^-$, $N \cap M_{10}^-$ y $O \cap M_{10}^-$ cuya intersección es ϕ .

Aplicando, entonces, el segundo axioma de probabilidad se obtiene:

$$P(M_{10}^-) = P(D \cap M_{10}^-) + P(N \cap M_{10}^-) + P(O \cap M_{10}^-)$$

Y, finalmente, aplicando la regla multiplicativa se obtiene:

$$P(M_{10}^-) = P(D)P_D(M_{10}^-) + P_N(M_{10}^-) + P_O(M_{10}^-)$$

que corresponde a la aplicación de la probabilidad total.

Reemplazando valores ya se puede responder a la pregunta:

$$P(M_{10}^-) = (0.3)(0.6) + (0.6)(0.4) + (0.1)(0.8) = 0.5$$

Por lo tanto,

Resp.: El 50% de los niños del hospital (0.5) tiene menos de 10 años.

Ejemplo 4.

(Aplicación en Ciencias de la Salud, continuación)

En el contexto del problema anterior:

¿Qué porcentaje de los niños que tienen menos de 10 años, es normal?

Esquema de solución

Paso 1. Leer cuidadosamente el enunciado del problema para identificar experimento, espacio de muestra, sucesos y la pregunta.

Leer el ejemplo anterior y su solución.

Paso 3. Calcular la probabilidad pedida aplicando propiedades, si es ventajoso, y responder:

Se pide calcular, entre los niños que tienen menos de 10 años (la condición), el porcentaje que es normal. Esto se expresa en símbolos por $P_{M_{10}^-}(N)$.

Así,

$$P_{M_{10}^-}(N) = \frac{P(N \cap M_{10}^-)}{P(M_{10}^-)} = \frac{P(N)P_N(M_{10}^-)}{P(M_{10}^-)} = \frac{(0.6)(0.4)}{0.5} = 0.48$$

Resp.: El 48% de los niños menores de 10 años, son normales.

Ejemplo 5.

(Aplicación en Ciencias de la Salud, continuación)

El control del niño sano se realiza en tres consultorios los cuales se distribuyen de la siguiente manera:

20% de los niños fue controlado en el consultorio norte, 50% de los niños fue controlado en el consultorio centro, 30% de los niños fue controlado en el consultorio sur.

De los niños controlados en el consultorio norte, el 5% presenta problemas respiratorios; de los controlados en el consultorio centro, el 2% presenta problemas respiratorios y en el consultorio sur, el 3% presenta problemas respiratorios.

Se escoge un niño al azar y se encuentra que presenta problemas respiratorios ¿En qué consultorio es más probable que haya sido controlado?

Esquema de desarrollo

Paso 2. Leer cuidadosamente el enunciado del problema para identificar experimento, espacio de muestra, sucesos y la pregunta.

Experimento: Se controlan niños en 3 consultorios: norte, centro y sur de una ciudad. En estos establecimientos un niño puede o no presentar problemas respiratorios. Se elige un niño al azar entre los atendidos en los tres consultorios y presenta problemas respiratorios. Se desea saber qué consultorio es más probable de haber sido atendido este niño.

Espacio de muestras Ω : Conjunto de niños atendidos en los consultorios norte, centro y sur de una ciudad.

Sucesos de interés: B : El niño presenta problemas respiratorios.
 H_1 : El niño es controlado en el consultorio norte.
 H_2 : El niño es controlado en el consultorio centro.
 H_3 : El niño es controlado en el consultorio sur.

Probabilidad:

$$P(H_1) = 0.20; \quad P(H_2) = 0.50; \quad P(H_3) = 0.30$$

$$P_{H_1}(B) = 0.05; \quad P_{H_2}(B) = 0.02; \quad P_{H_3}(B) = 0.03$$

Se pide: Valor más alto entre $P_B(H_1)$, $P_B(H_2)$, $P_B(H_3)$.

Paso 4. Calcular las probabilidades pedidas aplicando propiedades si es ventajoso y responder:

Por el teorema de la probabilidad total:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(H_1)P_{H_1}(B) + P(H_2)P_{H_2}(B) + P(H_3)P_{H_3}(B) \\ &= (0.2)(0.05) + (0.5)(0.02) + (0.3)(0.03) = 0.029 \end{aligned}$$

Por el teorema de Bayes:

$$P_B(H_1) = \frac{P(H_1)P_{H_1}(B)}{P(B)} = \frac{0.01}{0.029} = 0.3448$$

$$P_B(H_2) = \frac{P(H_2)P_{H_2}(B)}{P(B)} = \frac{0.01}{0.029} = 0.3448$$

$$P_B(H_3) = \frac{P(H_3)P_{H_3}(B)}{P(B)} = \frac{0.009}{0.029} = 0.31$$

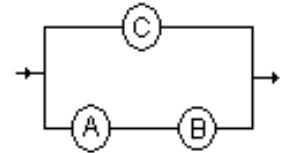
Resp.: Si el niño tiene problemas de respiración, son los consultorios norte y centro los que presentan una probabilidad mayor de haberlo atendido.

3.3.2 Ejercicios Propuestos.

1. Dados dos sucesos A y B , tales que $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.3$ y $P(A \cap B) = 0.1$, determine las siguientes probabilidades: $P_B(A)$, $P_A(B)$, $P_{A \cup B}(A)$, $P_{A \cap B}(A)$, $P_{A \cup B}(A \cap B)$.
2. Diga cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas justificando su respuesta:
 - a. $P(A \cup B) = 1 - P(A^c)P(B^c)$ si A y B son independientes.
 - b. $P_B(A) + P_B(A^c) = 1$.
 - c. Si $P(A) = \frac{1}{4}$; $P_A(B) = \frac{1}{2}$; $P_B(A) = \frac{1}{4}$ entonces:
 - i. A y B son mutuamente excluyentes.
 - ii. A es subconjunto de B .
 - iii. $P_{B^c}(A^c) = \frac{3}{4}$.
 - iv. $P_B(A) + P_{B^c}(A) = 1$.
3. Una caja A contiene 5 arandelas de cobre y 6 de bronce y una caja B contiene 8 arandelas de cobre y 4 de bronce. Dos arandelas son elegidas sin reemplazo de la caja B y depositadas en la caja A, luego se extrae una arandela de la caja A.
 - a. ¿Cuál es la probabilidad de que la arandela extraída de la caja A sea de bronce?
 - b. Si la arandela extraída de la caja A es de bronce ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una de las arandelas extraídas de la caja B haya sido de bronce?
4. (Aplicación en Ciencias de la Educación) Supongamos que se tienen dos urnas 1 y 2, cada una con dos cajones. La urna 1 contiene una moneda de oro en un cajón y una de plata en el otro, mientras que la urna 2 contiene una moneda de oro en cada uno de los cajones. Se escoge una urna al azar y de ésta se escoge un cajón al azar. Si la moneda encontrada resulta ser de oro ¿De qué urna será más probable que provenga?
5. (Aplicación en Ciencias de la Ingeniería) Suponga que se tienen dos cajas idénticas con tornillos. La caja 1 tiene 5 tornillos de cobre, 2 de bronce y 9 de hierro. La caja 2 tiene 3 tornillos de cobre y 5 de bronce. Se lanza un dado, si sale un múltiplo de cinco se escoge un tornillo de la caja 2 y si no es así se escoge un tornillo de la caja 1.
 - a. Calcular la probabilidad de que el tornillo escogido al azar sea de cobre.
 - b. Si el tornillo escogido resultó ser de cobre. ¿De qué caja cree Ud. que es más probable que haya sido escogido?
6. (Aplicación en Ciencias de la Ingeniería) En una fábrica se tiene dos máquinas para producir tornillos. La máquina 1 produce el 31% de tornillos de cobre el 12% de tornillos bronce y el resto de hierro. La máquina 2 produce el 37% de tornillos de cobre y el resto de bronce. Se lanza un dado y si

sale un múltiplo de 3 se escoge un tornillo de la producción de la máquina 2 y si no es así se escoge un tornillo de la producción de la máquina 1.

- a. Calcular la probabilidad de que el tornillo elegido al azar sea de cobre.
 - b. Si el tornillo escogido resultó de cobre ¿De qué máquina cree Ud. es más probable que haya sido producido?
 - c. Si se escogen 5 tornillos con reposición de la producción total ¿Cuál será la probabilidad de que a lo más dos sean de cobre?
7. (Aplicación en Ciencias de la Ingeniería) Un sistema de abastecimiento de agua potable pasa por un dispositivo dotado de 3 compuertas A , B y C configurados tal como muestra el esquema. Las compuertas A , B y C funcionan correctamente con probabilidades 0.90 , 0.80 y 0.65 respectivamente. Si la compuerta A funciona correctamente, la probabilidad de que B funcione correctamente es de 0.66 . Si las compuertas A y B funcionan correctamente, la probabilidad de que C funcione correctamente es de 0.83 . Además existe un probabilidad de 0.10 de que A funcione correctamente y no funcione ni B ni C correctamente.



- a. Determine la probabilidad de que el sistema funcione correctamente.
 - b. Si el sistema falla. ¿Cuál es la probabilidad de que la compuerta A funcione correctamente?
8. (Aplicación en Ciencias de la Ingeniería) El tablero conmutador telefónico es de muy poca capacidad en cuanto al tiempo de ocupado se refiere, de tal forma que las personas no pueden encontrar una línea desocupada para sus llamadas. Se sabe que existe un 10% de posibilidades de lograr una comunicación durante el PERIODO NORMAL (9:00 a 19:00) y de un 30% en el PERIODO REDUCIDO (20:00 a 23:59).

Se elige al azar un período y en el período elegido, se realiza al azar un intento para lograr una comunicación. Si se logra una comunicación, ¿En qué período cree Ud. es más probable que haya sido obtenida dicha comunicación?. Justifique.