**PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE**
**FACULTAD DE MATEMÁTICAS / DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA**
**EYP2214 ESTADISTICA PARA BACHILLERATO**

# Ejercicios Resueltos Ayudantía 8

**Profesor:** Eduardo Rodríguez. Primer Semestre 2004
**Ayudante:** Romina Meza.

**Distribución Normal:**

3. Considere una población de recién nacidos, en los cuales interesa estudiar la variable talla.
   Se puede suponer que la talla de los recién nacidos es una v.a. con distribución normal con esperanza 50 cm y desviación estándar 2 cm.

   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que un niño mida menos de 45 cm al nacer?

   (b) ¿Cuál es la probabilidad de que un niño al nacer mida a lo menos 52 cm?

   (c) ¿Qué porcentaje de recién nacidos que mide entre 48 y 52 cm ?

   (d) Si nacen 200 niños en un mes, ¿cuantos de ellos medirán entre 48 y 52 cm?

   **Solución:**

3. $$X \sim N(50; 2^2)$$

   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que un niño mida menos de 45 cm al nacer? (Resp: 0.0062)

$$\begin{aligned} P(X < 45) &= P\Big(\frac{X-50}{2} < \frac{45-50}{2}\Big) \\ &= P(Z < -2.5) \\ &= \Phi(-2.5) \\ &= 1 - \Phi_Z(2.5) \\ &= 1 - 0.9938 \\ &= 0.0062 \end{aligned}$$

   (b) ¿Cuál es la probabilidad de que un niño al nacer mida a lo menos 52 cm? (Resp: 0.1589)

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 52) &= P\Big(\frac{X-50}{2} \geq \frac{52-50}{2}\Big) \\
&= P(Z \geq 1) \\
&= 1 - P(Z < 1) \\
&= 1 - \Phi_Z(1) \\
&= 1 - 0.8413 \\
&= 0.1587
\end{aligned}
$$

(c) ¿Qué porcentaje de recién nacidos que mide entre 48 y 52 cm ? (Resp: 68.16%)

$$
\begin{aligned}
P(48 < X < 52) &= P\Big(\frac{48-50}{2} < \frac{X-50}{2} \leq \frac{52-50}{2}\Big) \\
&= P(-1 \leq Z \leq 1) \\
&= 2\Phi_Z(1) - 1 \\
&= 2 \cdot 0.8413 - 1 \\
&= 0.6826
\end{aligned}
$$

Luego $\quad 0.6826 \cdot 100 = 68.26\%$

(d) Si nacen 200 niños en un mes, ¿cuantos de ellos medirán entre 48 y 52 cm? (Resp: 137 niños)

$$
P(48 \leq X \leq 52) = 0.6826 \quad \Rightarrow \quad 0.6826 \cdot 200 = 136.52
$$

Respuesta: 137 niños.

(e) ¿Con cuantos centímetros a lo más nacen el 80% de los niños? (Resp: 51.69 cm)

$$
\begin{aligned}
P(X \leq x) &= 0.8 \\
&\Updownarrow \\
P\Big(Z \leq \frac{x-50}{2}\Big) &= 0.8 \\
&\Updownarrow \\
\frac{x-50}{2} &= Z_{0.8} \\
&= 0.845 \\
&\Updownarrow \\
x &= 50 + 0.845 \cdot 2 \\
&= 51.69
\end{aligned}
$$

4. Consideremos que la grasa (grs. por lt) contenida en la leche es una v.a. Normal con media 30 grs. por lt y desviación estándar 2 grs por lt. Si elegimos una m.a. de 20 cajas de leche de un litro de leche.

   (a) ¿Cuán probable es que el promedio de grasa que contenga sea más de 31 grs? (Resp: 0.0125)

   (b) ¿Cuál es la probabilidad que el promedio de grasa esté entre 29 y 31 grs. de grasa? (Resp: 0.975)

   **Solución**

4. $X$ = "Grasa (grs. por lt) contenida en la leche"

$$X \sim N(30; 2^2) \qquad n = 20$$

Y por TCL:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \text{donde} \quad Z \sim N(0;1)$$

   (a) ¿Cuán probable es que el promedio de grasa que contenga sea más de 31 grs? (Resp: 0.0125)

$$\begin{aligned} P(\overline{X} > 31) &= P\Big(\frac{\overline{X} - 30}{2/\sqrt{20}} > \frac{31 - 30}{2/\sqrt{20}}\Big) \\ &= P(Z > 2.236) \\ &= 1 - P(Z \leq 2.236) \\ &= 1 - \Phi_Z(2.236) \\ &= 1 - 0.9873 \\ &= 0.0127 \end{aligned}$$

   (b) ¿Cuál es la probabilidad que el promedio de grasa esté entre 29 y 31 grs. de grasa? (Resp: 0.975)

$$\begin{aligned} P(29 \leq \overline{X} \leq 31) &= P\Big(\frac{29 - 30}{2/\sqrt{20}} \leq \frac{\overline{X} - 30}{2/\sqrt{20}} \leq \frac{31 - 30}{2/\sqrt{20}}\Big) \\ &= P(-2.236 \leq Z \leq 2.236) \\ &= 2\Phi_Z(2.236) - 1 \\ &= 2 \cdot 0.9875 - 1 \\ &= 0.975 \end{aligned}$$

5. Considere una población de recién nacidos en determinado hospital, con edad gestacional entre 36 y 40 semanas y que hayan presentado anemia al nacer. Según determinados estudios si el peso del niño al nacer es superior a 3000 grs. Estos niños tienen buen pronóstico. Suponga que el 80% de los niños que nacen con anemia pesa sobre 3 kg.
   Si tomamos una muestra aleatoria de 200 de estos niños

   (a) ¿Cuál es la probabilidad que al menos 150 tengan buen pronóstico? (Resp: 0.9616)
   (b) ¿Cuál es el número esperado de niños anémicos que tienen buen pronóstico al nacer? (Resp: 160 )
   (c) ¿Con 90% de seguridad, cuántos de ellos tienen al menos buen pronóstico? (Resp: 153)

**Solución:**

5. A = “Niño con peso superior a 3 kg”
   $P(A) = p = 0.8 \quad \text{y} \quad n = 200$

   $X =$ “Número de niños que pesan mas de 3 kg”

$$X \sim Bin(200; 0.8)$$

Aproximación normal de la distribución binomial:

$$\begin{aligned}\mu &= np = 0.8 \cdot 200 = 160 \\ \sigma &= \sqrt{npq} = \sqrt{200 \cdot 0.8 \cdot 0.2} \\ &= \sqrt{32} = 5.65\end{aligned}$$

   (a) ¿Cuál es la probabilidad que al menos 150 tengan buen pronóstico? (Resp: 0.9616)

$$\begin{aligned}P(X \geq 150) &= P\Big(\frac{X - np}{\sqrt{npq}} \geq \frac{150 - 160}{5.65}\Big) \\ &= P(Z \geq -1.76) \\ &= \Phi(1.769) \\ &= 0.9616\end{aligned}$$

   (b) ¿Cuál es el número esperado de niños anémicos que tienen buen pronóstico al nacer? (Resp: 160 )

$$E(X) = np = 0.8 \cdot 200 = 160$$

(c) ¿Con 90% de seguridad, cuántos de ellos tienen al menos buen pronóstico? (Resp: 153)

$$\begin{aligned}
P(X \geq x) &= 0.90 \\
1 - P(X < x) &= 0.90 \\
P(X < x) &= 0.10 \\
& \Updownarrow \\
P\Big(Z \leq \frac{x-160}{5.65}\Big) &= 0.10 \\
& \Updownarrow \\
\frac{x-160}{5.65} &= Z_{0.10} \\
&= -1.28 \\
& \Updownarrow \\
x &= 160 + (-1.28) \cdot 5.65 \\
&= 152.75
\end{aligned}$$

**Ejercicios Propuestos**

1. Se desea estudiar las características físicas de los habitantes de determinado pueblo. Para hacer el estudio se consideran aquellos que tengan entre 18 y 35 años. Entre las variables de interés se encuentra el peso de cada habitante (por el tipo de alimentación y el ritmo de vida que llevan). Si se considera que la distribución de los pesos es Normal con media 60,5 kg y desviación estándar 5 kg.
   Si se selecciona un individuo al azar:

   (a) ¿Cuál es la probabilidad que pese más de 60 kg? (Resp: 0.5398)
   (b) ¿Cuál es la probabilidad que pese entre 50 y 65 kg? (Resp: 0.798)
   (c) ¿Qué peso tiene a lo más el 75% de los individuos? (Resp: 63.875 kg)
   (d) Si se toma una muestra de 100 individuos ¿Qué porcentaje de ellos pesarán entre 50 y 65 kg? (Resp: 79.8%)

   **Solución**

1.
$$X \sim N(60.5; 5^2)$$

   (a) ¿Cuál es la probabilidad que pese más de 60 kg? (Resp: 0.5398)

$$\begin{aligned}
P(X > 60) &= P\Big(\frac{X-60.5}{5} > \frac{60-60.5}{5}\Big) \\
&= P(Z > -0.1) \\
&= \Phi_Z(0.1) \\
&= 0.5398
\end{aligned}$$

(b) ¿Cuál es la probabilidad que pese entre 50 y 65 kg? (Resp: 0.798)

$$\begin{aligned} P(50 \le X \le 65) &= P\Big(\frac{50-60.5}{5} < \frac{X-60.5}{5} \le \frac{65-60.5}{5}\Big) \\ &= P(-2.1 \le Z \le 0.9) \\ &= \Phi_Z(0.9) - \Phi_Z(-2.1) \\ &= \Phi_Z(0.9) - (1-\Phi_Z(2.1)) \\ &= 0.8159 - (1 - 0.9821) \\ &= 0.798 \end{aligned}$$

(c) ¿Qué peso tiene a lo más el 75% de los individuos? (Resp: 63.875 kg)

$$\begin{aligned} P(X \le x) &= 0.75 \\ &\Updownarrow \\ P\Big(Z \le \frac{x-60.5}{5}\Big) &= 0.75 \\ &\Updownarrow \\ \frac{x-60.5}{5} &= Z_{0.75} \\ &= 0.675 \\ &\Updownarrow \\ x &= 60.5 + 0.675 \cdot 5 \\ &= 63.875 \end{aligned}$$

(d) Si se toma una muestra de 100 individuos ¿Qué porcentaje de ellos pesarán entre 50 y 65 kg? (Resp: 79.8%)

$$P(50 \le X \le 65) = 0.798 \quad \Rightarrow \quad 0.798 \cdot 100 = 79.8\%$$

2. Se cree que la vitamina C puede ser útil para reducir la cantidad de colesterol de las arterias, supongamos que la cantidad en que disminuye el colesterol es una v.a. N(64,3mg; 18,9mg). Si tomamos una muestra de 25 individuos a los cuales se les obligó a tomar una cantidad fija de vitamina C en cierto período de tiempo y finalizado el período medimos su colesterol

   (a) ¿Cuál es la probabilidad que la cantidad promedio de colesterol en el grupo haya disminuido menos de 65 mg? (Resp: 0.5636 )

   (b) ¿Cuán probable es que el promedio de colesterol disminuya entre 60 y 65 mg? (Resp: 0.4025 )

   (c) ¿En que porcentaje de la población disminuirá la cantidad de colesterol en a lo más 60 mg? (Resp: 16.11%)

**Solución:**

2. $X =$ "Cantidad en que disminuye el colesterol"

$$X \sim N(64,3mg; 18,9mg) \qquad n = 25$$

   (a) ¿Cuál es la probabilidad que la cantidad promedio de colesterol en el grupo haya disminuido menos de 65 mg? (Resp: 0.5636 )

$$\begin{aligned} P(\overline{X} < 65) &= P\Big(\frac{\overline{X} - 64.3}{18.9\sqrt{25}} < \frac{65 - 64.3}{18.9\sqrt{25}}\Big) \\ &= P(Z < 0.185) \\ &= \Phi_Z(0.185) \\ &= 0.57335 \end{aligned}$$

   (b) ¿Cuán probable es que el promedio de colesterol disminuya entre 60 y 65 mg? (Resp: 0.4025 )

$$\begin{aligned} P(60 \leq \overline{X} \leq 65) &= P\Big(\frac{60 - 64.3}{18.9\sqrt{25}} \leq \frac{\overline{X} - 64.3}{18.9\sqrt{25}} \leq \frac{65 - 64.3}{18.9\sqrt{25}} \\ &= P(-1.137 \leq Z \leq 0.185) \\ &= \Phi_Z(0.185) - (1 - \Phi_Z(1.137)) \\ &= 0.5733 - (1 - 0.8722) \\ &= 0.4456 \end{aligned}$$

   (c) ¿En que porcentaje de la población disminuirá la cantidad de colesterol en a lo más 60 mg? (Resp: 16.11%)

$$\begin{aligned} P(\overline{X} \leq 60) &= P\Big(\frac{\overline{X} - 64.3}{18.9\sqrt{25}} \leq \frac{60 - 64.3}{18.9\sqrt{25}}\Big) \\ &= P(Z \leq -1.137) \\ &= 1 - \Phi_Z(1.137) \\ &= 1 - 0.8723 \\ &= 0.1276 \end{aligned}$$

$$0.1276 \cdot 100 \quad \rightarrow \quad 12.76\%$$