Una guía sobre rectas como modelos matemáticos

Eliseo Martínez*

8 de mayo de 2018

Resumen

Se da un tratamiento a la recta alejada del formulismo e inserta en la modelación matemática para estudiantes de Ingeniería Comercial

1. El ángulo que produce una recta

Considere una recta en el plano cartesiano y suponga que esta recta no es paralela al eje horizontal X y además pasa por el origen $(0,0)$. Esta recta produce cuatro ángulos **con el eje** X como lo indica la Figura 1 y que, en esencia, solo conociendo uno de los ángulos los otros restantes están determinados. En consecuencia consideraremos como el ángulo principal al ángulo agudo α formado por la recta y el eje X en el **semiplano superior**. Si tomamos cuanquier punto arbitrario de esa recta, diganos (x,y), entonces es claro que

$$tg(\alpha) = \frac{y}{x} \tag{1}$$

Y en consecuencia todos los puntos de esa recta obedecen a la ecuación

$$y = tg(\alpha) \cdot x$$

Ahora si denotamos por $m = tg(\alpha)$ obtenemos la recta

$$y = m \cdot x$$

que pasa por el origen.

Observemos que si el ángulo α está en el primer cuadrante, entonces $m = tg(\alpha) > 0$, significando con esto que la recta es una función creciente; si por el contrario el ángulo agudo α cae en el segundo cuadrante entonces $m = tg(\alpha) < 0$ significando que la recta es una función decreciente. Observe la Grágica 2 donde ocurre este caso.

*Trabajo financiado por el Proyecto de Docencia: Hacer y corregir en los procesos de evaluación, 2017

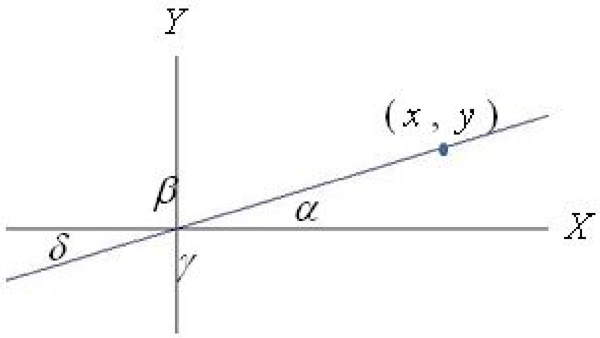

Figura 1: Gráfica de la recta $y = tg(\alpha) \cdot x$

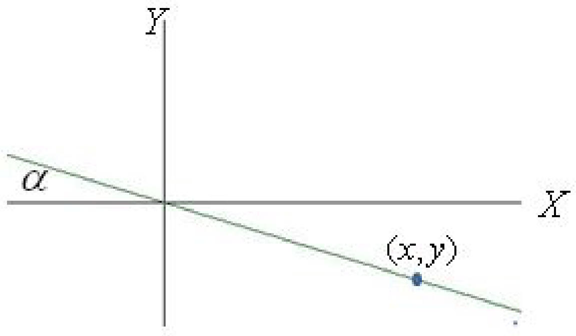

Figura 2: Gráfica de una recta con pendiente m negativa

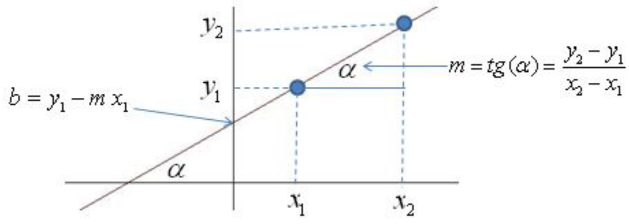

Figura 3: Obtención de la ecuación de una recta dado dos puntos de ella

2. Dos rectas rebeldes

Existen dos rectas que pasan por el origen y que no obedecen la ecuación (1) o la posterior. Si consideramos la recta que coincide con el eje X entonces nos vamor a referir a ella como la recta $y = 0$, entendiendo con esto que el conjunto de puntos de esta recta son los puntos $\{(x, 0)\}$. Ahora si consideramos a la recta que coincide con el eje Y nos vamos a referir a ella como la recta $x = 0$, entendiendo con esto que es el conjunto de puntos $\{(0, y)\}$

3. Subidas y bajadas de rectas $y = m \cdot x$

Si trasladamos la recta que pasa por el origen cuya ecuación es $y = m \cdot x$ y la subimos o bajamos [1] b unidades en el eje Y, entonces la ecuación de esta nueva recta trasladada (que será paralela a la anterior) es

$$y = m \cdot x + b \tag{2}$$

Los parámetros m y b son el carné de identidad de la recta, y son fáciles de obtener. Sabemos que por dos puntos, digamos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), pasa una única recta. Entonces esta recta tiene pendiente

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{3}$$

Observe la Gáfica 2. Luego de obtenida la pendiente m reemplazamos en la recta $y = m \cdot x + b$ el punto [2] (x_1, y_1) y se obtiene que $y_1 = m \cdot x_1 + b$ y de aquí se consigue el valor de b.
De esta forma si tenemos a la vista, por ejemplo, la recta $y = 3x - 5$ sabemos que es una recta muy pronunciada hacia arriba (creciente) y que corta al eje Y en el valor -5. De la misma manera la recta $y = -2x + 1$ es una recta decreciente y que corta al eje Y en el valor 1.

[1] Entendemos por *subir* si $b > 0$ y por *bajar* si $b < 0$
[2] Cualquiera de los dos puntos

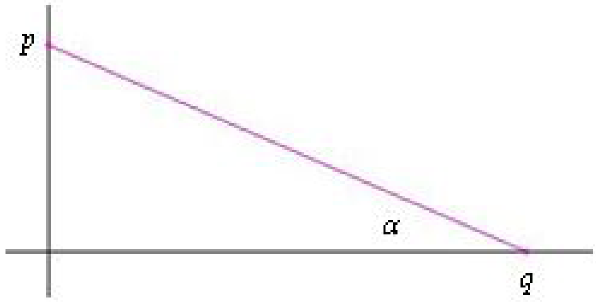

Figura 4: Segmento de recta entre los puntos $(0, p)$ y $(q, 0)$

4. Partes de una recta para la modelación

Toda recta $y = m \cdot x + b$ está definida para $-\infty < x < \infty$ y esto puede ser exagerado, en rigor uno utiliza, en general, la ecuación de una recta restringida a un cierto dominio, esto es $p \leq x \leq q$. Veamos un ejemplo.

4.1. Segmento de recta: precio y demanda

Queremos determinar la ecuación de la recta que cubre el segmento que está entre los puntos $(0, p)$ y $(q, 0)$ como lo indica la Figura 4. Observemos que la pendiente de la recta es negativa (queda en el segundo cuadrante del círculo unitario trigonométrico), en consecuencia la ecuación del segmento de recta es

$$y = -\frac{p}{q} \cdot x + p\,,\ 0 \leq x \leq q \tag{4}$$

La interpretación que puede tener este modelo es el siguiente: Consideremos la relación precio y demanda de un determinado artículo. El eje horizontal representará el precio por unidad del artículo, x, y el eje vertical representará el número de artículos demandados, y, y la interpretación es bastante natural. Si el precio disminuye la demanda aumenta, si el precio aumenta la demanda disminuye. Es cierto que el comportamiento entre precio y demanda no necesariamente es lineal, pero este modelo recoge la relación inversa[3], y natural, que existe entre precio y demanda. Este modelo parece indicar que más artículos venderemos mientras más barato vendamos, sin embargo aparece el factor de costo que es muy frecuente en ciertos procesos económicos que obedecen a la llamada **Ley de Rendimientos Decrecientes**, y el razonamiento es el siguiente: Si la demanda aumenta necesitaremos, entonces, elaborar más artículos para satisfacer la demanda, pero la manufacturación o producción de un artículo tiene un costo, digamos h en unidad monetaria por artículo, más un costo fijo, f

[3] O a veces llamada *correlación negativa* entre precio y demanda

independiente del número de artículos producidos, entonces aparece la función de costo asociado, C a la variable de demanda, y, esto es

$$C(y) = h \cdot y + f \tag{5}$$

donde el dominio de esta recta es $0 \leq y \leq p$ conforme el recorrido de la primera recta dada en (4). Y este modelo de costo es una recta con pendiente positiva. Es decir a medida que las demanda crece, crece el costo de producción, lo que origina un problema no trivial de seleccionar el mejor precio para el producto.

5. Problemas

Para los modelos dados en (4) y (5) grafique los segmentos de rectas para los siguientes valores en unidades de mil: $p = 6$ (seis mil artículos), $q = 3$ (tres mil dólares por artículo), $h = 1$ (mil dólares por artículo), y $f = 4$ (cuatro mil dólares en costos fijos.
Además para los mismos valores anteriores determine el costo de producción para una demanda originada por el precio de venta de $x = 2$ (dos mil dólares por artículo)

Referencias

[1] Apuntes del curso