

El número e en las finanzas

Eliseo Martínez, Manuel Barahona

1990-2015

Abstract

Existen algunos fenómenos de naturaleza económica que se pueden modelar con ayuda de la expresión dada por $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Entre éstos se hallan aquellos que permiten calcular el interés que genera el dinero cuando se deposita en bancos o financieras.

1 Modelos de inversión a plazos

Cuando el dinero (**el principal**) se invierte en un banco, comunmente genera intereses. Cuando dicho interés se calcula directamente sobre el principal, se llama **interés simple**. Después que han pasado " t " años, el saldo (es decir el principal más el interés) se calcula con la fórmula¹:

$$s(t) = P(1 + r \cdot t)$$

donde P está dado en pesos, t en años y r (**la tasa de interés**) se expresa mediante un número decimal.

En muchos bancos el interés se compone (se calcula) más de una vez por año, por ejemplo, k veces. De esta forma el interés que se suma a la cuenta cada k veces, devengará interés sobre el interés. Si el interés se compone k veces al año, dicho año queda dividido en periodos de intereses igual a $\frac{r}{k}$. En consecuencia el saldo final del primer período es de:

$$P \left(1 + \frac{r}{k}\right)$$

¹En efecto, al principal P se le debe sumar la fracción de interés $P \cdot r$, que además será proporcional al tiempo transcurrido (si es que no saca el dinero del banco, claro), de modo que lo que tendrá en el banco es $P + P \cdot r \cdot t$, y a esta cantidad, que es el saldo en el tiempo t , la denotamos por $s(t)$.

el saldo final del segundo período es de:

$$P \left(1 + \frac{r}{k}\right) + P \left(1 + \frac{r}{k}\right) \frac{r}{k} = P \left(1 + \frac{r}{k}\right) \left(1 + \frac{r}{k}\right) = P \left(1 + \frac{r}{k}\right)^2$$

Al final del primer año el interés ha sido compuesto k veces y el saldo es

$$P \left(1 + \frac{r}{k}\right)^k$$

Al final de t años el interés ha sido compuesto $k \cdot t$ veces y el saldo viene dado por la función:

$$P \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt}$$

Este tipo de interés se llama **Interés compuesto**.

Si el número de veces que se compone el interés se permite que crezca sin límites, el interés se dice que se compone continuamente. En esta situación el saldo después de t años viene dado por la función

$$s(t) = Pe^{rt}$$

Este tipo de interés se llama **Interés Compuesto Continuosamente**.

Ejemplo 1

La Federación de Estudiantes de la Universidad de Champorro decide depositar dos millones de peso en un banco que está pagando 6% anual. Calcule el saldo después de 2 años si el interés se compone a) trimestralmente; y b) continuamente.

Solución. a) De acuerdo a las condiciones del problema, se trata de calcular el saldo donde el interés es compuesto. Para esto usamos la función:

$$s(t) = P \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt}$$

en que $P = 2.000.000$ de pesos, $t = 2$, $r = 0,06$ y $k = 4$.

El saldo que se obtendrá al cabo de dos años es:

$$s(2) = 2.000.000 \left(1 + \frac{0,06}{4}\right)^{4 \cdot 2} =$$

es decir

$$2.000.000 \left(1 + \frac{0,06}{4}\right)^8 \approx 2.252.985 \text{ pesos}$$

b) Si el interés se compone continuamente usamos la función

$$s(t) = P e^{rt}$$

donde $P = 2.000.000$, $r = 0,06$ y $t = 2$. En esta situación el saldo que se obtendrá después de dos años es:

$$s(2) = 2.000.000 e^{0,12} \approx 2.254.993 \text{ pesos}$$

Observe que el dinero que gana más intereses es el que se compone continuamente.