El modelo exponencial

Eliseo Martínez, Manuel Barahona

Abstract

Objetivos de estos apuntes:

- Comprender el concepto de función exponencial como modelo.
- Conocer el gráfico de la función exponencial
- Comprender los modelos de crecimiento, decrecimiento, logístico y de aprendizaje.
- Resolver ecuaciones exponenciales
- Utilizar el software DERIVE para estudiar modelos que se comportan exponencialmente
- Utilizar el software DERIVE para estudiar el concepto de límite de una función

La función exponencial juega un papel central en Matemática Aplicada. Se usa en finanzas para calcular el valor de las inversiones a plazo, en demografía para predecir el tamaño de una población, en arqueología para fechar objetos antiguos, en psicología para estudiar fenómenos de aprendizaje, en salud para analizar la propagación de las epidemias, en la industria para estimar la factibilidad de la producción, en estadística es el eje central de la distribución de Gauss, en física, química, biología, minería, ecología, etcétera. En suma, esta función es una poderosa herramienta para estudiar determinados fenómenos de la naturaleza. Al estudiarla aparece una expresión algebraica de primordial importancia, se trata de:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{1}$$

expresión que a medida que evaluamos para valores crecientes de n, tiende a un útil e importante número que, en lo sucesivo, llamaremos número "e".

Para tener una idea clara de lo que estamos asegurando, utilicemos el software DERIVE y calculemos dicha expresión para algunos pequeños y grandes valores de n. Construya las siguentes sentencias en el DERIVE:

$$\#1\ (1+1/n)\hat{\ }n$$
$$\#2\ vector([n,(1+1/n)\hat{\ }n],n,1,30,2)$$

luego capturando la expresión en "#2" oprima el icono $\approx$ y deberá aparecer la siguiente tabla:

1	2
3	2.370370370
5	2.48832
7	2.546499697
9	2.581174791
11	2.604199011
13	2.620600887
15	2.632878717
17	2.642414375
19	2.650034326
21	2.656263213
23	2.661450118
25	2.665836331
27	2.669593977
29	2.672849143

Tabla 1

Si ahora queremos calcular esta expresiones para valores máyores, hacemos:

$$\#3\ vector([n,(1+1/n)\hat{\ }n],n,0,1000,100)$$

y obtenemos la Tabla 2, esto es

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 100 & 2.704813829 \\ 200 & 2.711517122 \\ 300 & 2.713765157 \\ 400 & 2.714891744 \\ 500 & 2.715568520 \\ 600 & 2.716020048 \\ 700 & 2.716342737 \\ 800 & 2.716584846 \\ 900 & 2.716773208 \\ 1000 & 2.716923932 \end{bmatrix}$$

Tabla 2

Para mayor precisión podemos hacer calculos puntuales de la expresión (1), haciendo

$$f(n) := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$f(100000)$$

y luego nos posiconamos en $f(100000)$ y oprimimos el icono $\approx$ y obtenemos el resultado **2.7182**68237. Se han marcado con negritas los decimales exactos de la aproximación del número "e" para $n = 100.000$. En realidad, cuando n crece sin límites, es decir cuando "n tiende a infinito", la expresión $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ se aproxima a un número irracional que frecuentemente se lo designa con la letra e. El valor aproximado de este número a 9 decimales es

$$e \approx 2.718281828$$

Formalmente decimos que dicha expresión "tiende a e", cuando n crece sin límite y escribimos:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$$

Más adelante analizaremos en detalle la importancia del número e. Una aplicación interesante de esta expresión, la hallamos en un modelo que permite calcular los intereses a plazos devengados[1] por un capital.

[1] En economía y contabilidad, el devengo es el principio por el cual todo ingreso o gasto

1 Modelos de inversión a plazos

Existen algunos fenómenos de naturaleza económica que se pueden modelar con ayuda de la expresión dada en (1). Entre éstos se hallan aquellos que permiten calcular el interés que genera el dinero cuando se deposita en bancos o financieras.

Cuando el dinero (**el principal**) se invierte en un banco, comunmente genera intereses. Cuando dicho interés se calcula directamente sobre el principal, se llama **interés simple**. Después que han pasado "t" años, el saldo (es decir el principal más el interés) se calcula con la fórmula[2]:

$$s(t) = P(1 + r \cdot t)$$

donde P está dado en pesos, t en años y r (**la tasa de interés**) se expresa mediante un número decimal.

En muchos bancos el interés se compone (se calcula) más de una vez por año, por ejemplo, k veces. De esta forma el interés que se suma a la cuenta cada k veces, devengará interés sobre el interés. Si el interés se compone k veces al año, dicho año queda dividido en periodos de intereses igual a $\frac{r}{k}$. En consecuencia el saldo final del primer período es de:

$$P\left(1 + \frac{r}{k}\right)$$

el saldo final del segundo período es de:

$$P\left(1 + \frac{r}{k}\right) + P\left(1 + \frac{r}{k}\right)\frac{r}{k} = P\left(1 + \frac{r}{k}\right)\left(1 + \frac{r}{k}\right) = P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^2$$

Al final del primer año el interés ha sido compuesto k veces y el saldo es

$$P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^k$$

---

nace en la etapa de compromiso, considerándose en este momento ya como incremento o disminución patrimonial a efectos contables y económicos. Es un derecho ganado que todavía no ha sido cobrado.

[2]En efecto, al principal P se le debe sumar la fracción de interés $P \cdot r$, que además será proporcional al tiempo transcurrido (si es que no saca el dinero del banco, claro), de modo que lo que tendrá en el banco es $P + P \cdot r \cdot t$, y a esta cantidad, que es el saldo en el tiempo t, la denotamos por $s(t)$.

Al final de t años el interés ha sido compuesto $k \cdot t$ veces y el saldo viene dado por la función:

$$P\left(1+\frac{r}{k}\right)^{k\,t}$$

Este tipo de interés se llama **Interés compuesto**.

Si el número de veces que se compone el interés se permite que crezca sin límites, el interés se dice que se compone continuamente. En esta situación el saldo despues de t años viene dado por la función

$$s(t) = Pe^{rt}$$

Este tipo de interés se llama **Interés Compuesto Continuamente**.

Ejemplo 1

La Federación de Estudiantes de la Universidad de Champorro decide depositar dos millones de peso en un banco que está pagando 6% anual. Calcule el saldo despues de 2 años si el interés se compone a) trimestralmente; y b) continuamente.

Solución. a) De acuerdo a las condiciones del problema, se trata de calcular el saldo donde el interés es compuesto. Para esto usamos la función:

$$s(t) = P\left(1+\frac{r}{k}\right)^{k\,t}$$

en que $P = 2.000.000$ de pesos, $t = 2$, $r = 0,06$ y $k = 4$.

El saldo que se obtendrá al cabo de dos años es:

$$s(2) = 2.000.000\ \left(1+\frac{0,06}{4}\right)^{4\cdot 2} =$$

es decir

$$2.000.000\ \left(1+\frac{0,06}{4}\right)^{8} \approx 2.252.985 \text{ pesos}$$

b) Si el interés se compone continuamente usamos la función

$$s(t) = P\,e^{r\,t}$$

donde $P = 2.000.000$, $r = 0,06$ y $t = 2$. En esta situación el saldo que se obtendrá después de dos años es:

$$s(2) = 2.000.000\,e^{0,12} \approx 2.254.993 \text{ pesos}$$

Observe que el dinero que gana más intereses es el que se compone continuamente. Las funciones que se expresan mediante potencias de "e" juegan un importante papel en una gran cantidad de modelos. Como hemos dicho en otras oportunidades, cuando estamos estudiando un determinado fenómeno de la naturaleza, siempre es conveniente tener un gráfico de la función que nos permita "ver" el comportamiento de dicho fenómeno. En lo que sigue trataremos de analizar esta cuestión.

2 El gráfico (en el DERIVE) de la función exponencial

En general una función exponencial es una función de la forma $f(x) = a^x$ donde a es una constante positiva y x es la incógnita. En la Figura (1) se muestran los gráficos de las funciones $f(x) = 2^x$ y $f(x) = 3^x$.

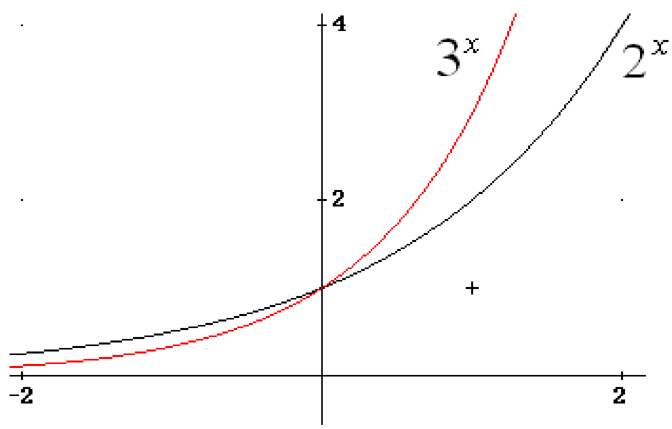


Figura 1

Podemos construir una tabla para algunos valores[3] de la variable independiente (la x), que nos permita visualizar su comportamiento. Escriba en el DERIVE las siguientes sentencias

[3] Estos apuntes fueron realizados años atrás, y la redacción de este párrafo era: "*Para trazar los gráficos de estas funciones podemos construir una tabla...*". Es decir, era la forma de "trazar" gráficas mediante algunos puntos de una tabla. Hoy, lo que se pretende, en virtud de los software matemáticos, es primero trazar la gráfica y luego analizar.

$$\#1 \ \ 2\hat{\ }x$$
$$\#2 \ \ 3\hat{\ }x$$
$$\#3 \ \ vector([x, 2\hat{\ }x, 3\hat{\ }x], x, -5, 5, 1)$$

luego se posisiona en la sentencia #3 y oprima el ícono ≈ y obtendrá la tabla siguiente:

-5	0.03125	0.004115226337
-4	0.0625	0.01234567901
-3	0.125	0.03703703703
-2	0.25	0.1111111111
-1	0.5	0.3333333333
0	1	1
1	2	3
2	4	9
3	8	27
4	16	81
5	32	243

Observe que las funciones están definidas para todos los valores reales de x, por lo tanto se dice que su **dominio** es $\mathbb{R}$. Por otra parte las gráficas están sobre el eje **X**, es decir $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, en consecuencia su ámbito, o **rango**, es igual a $\mathbb{R}^+$. Las gráficas son **asintóticas** al semieje negativo. Con esto queremos decir que cuando x se le asignan valores que tiendan a $-\infty$, los correspondientes valores de y tienden a cero. En un lenguaje más formal[4] se dice que cuando $x \to -\infty$ entonces $y \to 0$.

Se ve que ambas gráficas cortan al eje **X** en el punto $(0, 1)$. Y finalmente las dos funciones crecen indefinida,mente cuando los valores de x crecen. En un lenguaje más *simbólico* decimos que si $x \to 0$, entonces, $y \to +\infty$.

En general, si $f(x) = a^x$,con $a > 1$, entonces

i) $f(0) = a^0 = 1$, es decir la curva corta al eje **Y** en el punto $(0, 1)$

ii) No hay intersección en el eje **X**

[4] Es más correcto decir: *"En un lenguaje más simbólico..."*

iii) Si $x \to +\infty$, entonces $f(x) \to +\infty$. Dicho en palabras: si x tiende a más infinito, entonces $f(x)$ también tiende a más infinito.

iv) Si $x \to -\infty$, entonces $f(x) \to 0$.Dicho en palabras: si x tiende a menos infinito, entonces $f(x)$ también tiende a cero.

Podemos escribir entonces

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+};\ \text{tal que } f(x) = a^{x},\ a > 1$$

Tracemos ahora las gráficas de las funciones $\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ y $\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$, en las cuales la base es un número comprendido entre 0 y 1. Construyamos, tal como en el caso anterior, una tabla para algunos valores de la variable independiente. Escribamos las siguentes sentencias en el DERIVE

$$\begin{array}{l} \#1\ (1/2)\hat{}x \\ \#2\ \ (1/3)\hat{}x \\ \#3\ \ vector([x,(1/2)\hat{}x,(1/3)\hat{}x]\,,x,-3,3,1) \end{array}$$

Luego posicionandos en #1 y luego en #2 podemos construir las gráficas indicada en la Figura 2.

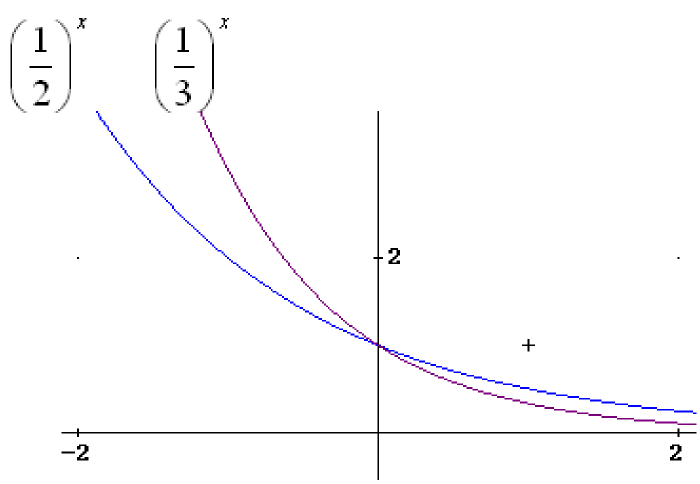


Figura 2

Y si nos posicionamos en #3 y oprimimos el icono ≈ aparecerá la siguiente tabla:

$$\begin{bmatrix} -3 & 8 & 27 \\ -2 & 4 & 9 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0.5 & 0.3333333333 \\ 2 & 0.25 & 0.1111111111 \\ 3 & 0.125 & 0.03703703703 \end{bmatrix}$$

Donde la primera columna indica los valores de x, la segunda y tercera columna los valores de $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ y $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ respectivamente. De las gráficas se pueden concluir que la función exponencial cuya base está entre 0 y 1 está definida para todos los números reales, es decir, su dominio es $\mathbb{R}$. Puesto que las gráficas están sobre el eje $\mathbf{X}$, $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, su ámbiro (rango) es $\mathbb{R}^+$.

Las gráficas son asintóticas al eje $\mathbf{X}$, es decir, cuando x tiende a $+\infty$, entonces $f(x) \to 0$. Además ambas gráficas cortan al eje $\mathbf{Y}$ en el punto $(0, 1)$. Finalmente, observemos que cuando $x \to -\infty$, entonces, $f(x) \to +\infty$.

En general, si $f(x) = a^x$,con $0 < a < 1$, entonces

i) $f(0) = a^0 = 1$, es decir la curva corta al eje $\mathbf{Y}$ en el punto $(0, 1)$

ii) No hay intersección en el eje $\mathbf{X}$

iii) Si $x \to +\infty$, entonces $f(x) \to 0$. Dicho en palabras: si x tiende a más infinito, entonces $f(x)$ tiende a cero.

iv) Si $x \to -\infty$, entonces $f(x) \to +\infty$.Dicho en palabras: si x tiende a menos infinito, entonces, $f(x)$ también tiende a más infinito.

Ejemplo 2.

Trace el gráfico de la función

$$f(x) = \frac{120}{4 + 8\,e^{-\,0.05\,x}}$$

Solución. Escriba en el DERIVE la sentencia

$$120\,/\,(4 + 8e\hat{}(0.05x))$$

cuidando que el "e" sea precisamente el número "e" y no la "letra e" del teclado (error muy frecuente). Posisionandose en esta expresión, la gráfica lucirá como en la Figura 3.

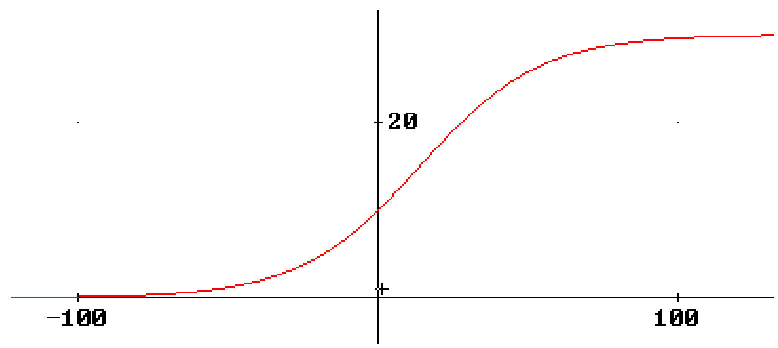


Figura 3

Cuado dibujamos con el software el gráfico de las funciones exponenciales, crecientes o decrecientes, analizamos los siguientes aspectos:

i) Determinamos el punto donde la curva corta al eje **Y**. Para hallar dicho punto debemos hacer $x = 0$ en la función propuesta, es decir

$$f(0) = \frac{120}{4 + 8\,e^{-\,0.05\cdot\,0}} = \frac{120}{4+8} = \frac{120}{12} = 10$$

ii) Observamos en la gráfica de la Figura 1 que no existe intersección con el eje **X**. Para comprobarlo analíticamente hacemos $f(x) = 0$, y nos queda la ecuación

$$\frac{120}{4 + 8\,e^{-\,0.05\,x}} = 0$$

Se ve que esta igualdad no puede ocurrir. En efecto, la expresión anterior es igual a cero si y sólo si el numerador es cero. Pero obviamente 120 es distinto de cero. Por lo tanto, efectivamente, la curva no corta al eje **X**.

iii) ¿Qué ocurre cuando $x \to +\infty$ en la fracción $\frac{120}{4+8\,e^{-\,0.05\,x}}$?

Notemos que $8\,e^{-\,0.05\,x}$ se puede escribir como $\frac{1}{8\,e^{0.05\,x}}$. Observemos que en esta última expresión:

$$\text{Si } x \to +\infty, \text{ entonces, } \frac{1}{8\,e^{0.05\,x}} \to 0$$

Por lo tanto, si $x \to +\infty$:

$$4 + 8\, e^{-\,0.05\, x} \to 4 + 0 = 4$$

En consecuencia la fracción:

$$\frac{120}{4 + 8\, e^{-\,0.05\, x}} \to \frac{120}{4} = 30$$

Esto significa que cuando el valor de x aumenta indefinidamente hacia la derecha, los valores de $f(x)$ se acercan al 30.

¿Qué ocurre cuando $x \to -\infty$ en la expresión $\frac{120}{4+8\, e^{-\,0.05\, x}}$? En esta situación se ve que si $x \to -\infty$, entonces, $8\, e^{-\,0.05 \cdot\, x} \to +\infty$. De esto se desprende que:

$$4 + 8\, e^{-\,0.05 \cdot\, x} \to +\infty$$

En consecuencia, tenemos que:

$$\frac{120}{4 + 8\, e^{-\,0.05\, x}} \to 0$$

Con frecuencia conviene construir una tabla con la información que hemos obtenido evaluando la función en algunos puntos (fundamentalmente para ver "la dimensión" de su gráfica y poder ajustar los ejes para observar de mejor manera a ésta). Ejecute la siguiente sentencia en el DERIVE

$$vector(\,[x, 120\,/\,(4 + 8e\hat{\ }(0.05x))], x, -5, 5, 1)$$

y oprimiendo $\approx$ obtenemos la tabla siguiente:

$$\begin{bmatrix} -3 & 9.026170970 \\ -2 & 9.344799255 \\ -1 & 9.669489772 \\ 0 & 10 \\ 1 & 10.33606385 \\ 2 & 10.67739213 \\ 3 & 11.02367316 \end{bmatrix}$$

Una de las aplicaciones más interesantes de la función exponenciasl se refiere a la dinámica de las poblaciones. En lo que sigue mostraremos algunas aplicaciones sencillas de modelos de crecimiento y decrecimiento de una población.

3 Crecimiento exponencial de Malthus

El modelo de Malthus, o de crecimiento ilimitado, supone únicamente que la velocidad de crecimiento de las poblaciones en el instante t, es proporcional al tamaño de la población en ese instante. Esto presupone que la población se desarrolla en un ambiente no sujeto a restricciones y que los recursos para mantener dicha población, so ilimitados. Se puede demostrar[5] que bajo esas condiciones la población crece en forma exponencial. Es decir, si $N(t)$ es el tamaño de la población en el instante t, entonces el crecimiento de dicha población se puede modelar mediante la función

$$N(t) = N_0\, e^{k\,t}$$

donde N_0 es el tamaño inicial de la población, en el instante $t = 0$, y k es una cierta constante[6] que se puede determinar de acuerdo al crecimiento de la población.

Ejemplo 3.

Un demógrafo halló que una ciudad que tenía 11.567 habitantes alcanzó, despues de 6 años, 60 000 individuos. Determine el tamaño de la población de dicha ciudad despues de 10 años. Suponga que la población crece sin restricciones.

Solución. Puesto que el tamaño inicial de la población es de $N_0 = 11\,567$ personas, podemos escribir:

$$N(t) = 11\,567\, e^{k\,t}$$

Por otra parte, como $N(6) = 60\,000$ resulta que

$$60\,000 = 11\,567\, e^{k\;6} \Leftrightarrow e^{6\,k} = \frac{60\,000}{11\,567} = 5,187 \Leftrightarrow e^{6\,k} = 5,187$$

Observe que esta ecuación tiene la incógnita en el exponente; razón por la cual se llama **ecuación exponencial**. Para resolver la ecuación debemos conocer la función logaritmo y sus propiedades. Aplicando dichas propiedades resulta:

$$\ln\, e^{6\,k} = \ln\, 5,187 \Leftrightarrow 6k = \ln\, 5,187 \Leftrightarrow k = \frac{1,646}{6} = 0,274$$

[5] En un curso de ecuaciones diferenciales haremos esta demostración, que es muy sencilla.

[6] Su significado numérico es el resultado entre la tasa de nacimiento menos la tasa de mortandad, en que se supone que la primera es mayor que la segunda.

Por lo tanto la función modeladora es:

$$N(t) = 11\,567\,e^{0{,}274\,t}$$

Para determinar el población que tendrá la ciudad dentro de los próximos 10 años calculamos $N(10)$. Resulta entonces que:

$$N(10) = 11\,567\,e^{0{,}274 \cdot 10} = 11\ 567 \cdot 15,48 = 179\,137,95$$

En consecuencia el tamaño de la población 10 años después será de 179 137 personas.

Ejemplo 4.

En un laboratorio se intenta determinar el crecimiento, bajo condiciones ideales, de un cultivo inicial de 2000 bacterias. Despues de 20 minutos se estima que el número de bacterias es de 6000, ¿cuántas bacterias habrán al final de una hora?

Solución. Si suponemos que N_0 es la cantidad de bacterias que habían inicialmente, esto es, $N_0 = 2000$ y el crecimiento del cultivo es de naturaleza exponencial, el modelo de crecimiento está dado por la función:

$$N(t) = 2000\,e^{k\,t}$$

en la cual debemos determinar el valor de la constante k. Puesto que pasados 20 minutos hay 6000 bacterias, se sigue que $N(20) = 6000\,e^{20 \cdot k}$, luego:

$$6000 = 2000\,e^{20 \cdot k} \text{ o lo que es lo mismo } e^{20 \cdot k} = 3$$

Para hallar el valor de la constante k debemos resolver la ecuación exponencial

$$e^{20 \cdot k} = 3$$

Aplicando las propiedades de los logaritmos resulta:

$$\ln e^{20 \cdot k} = \ln 3 \Leftrightarrow 20\,k = \ln 3 \Leftrightarrow k = \frac{\ln 3}{20} \approx 0,055$$

Puesto que $k = 0,055$ la función modeladora es:

$$N(t) = 2000\,e^{0{,}055\,t}$$

Por lo tanto, al final de 60 minutos habrán:

$$N(60) = 2000\,e^{0{,}055 \cdot 60} \approx 5,42 \times 10^4 \text{ bacterias}$$

4 Modelo de decrecimiento exponencial

Una cantidad $N(t)$ que decrece de acuerdo con una función de la forma

$$N(t) = N_0\, e^{-k \cdot t}$$

donde N_0 y k son constantes positivas se dice que experimenta un decrecimiento exponencial o que decrece exponencialmente. Este tipo de decrecimiento se da en fenómenos tales como el deecrecimiento radioactivo, decrecimiento de las ventas de un producto cuando se interrumpe la publicidad, depreciación del valor de las maquinarias después de cierto tiempo de uso, etcétera.

Ejemplo 5

Una cierta maquinaria industrial se deprecia[7] de forma que su valor, pasados t años, viene dada por la función:

$$Q(t) = Q_0\, e^{-\,0{,}04\, t}$$

Despues de 20 años, la maquinaria tiene un valor de 320000 pesos, ¿cuál era su valor original?

Solución. Observemos que el objetivo del problema es averiguar el valor de Q_0. Puesto que $Q(20) = 320000$ pesos se tiene:

$$Q(20) = Q_0\, e^{-\,0{,}04\,\cdot\,20} = Q_0\, e^{-\,0{,}8} = 320000$$

Por lo tanto debemos resolver la ecuación

$$Q_0\, e^{-\,0{,}8} = 320000$$

Para resolverla multiplicamos toda la ecuación por $e^{-\,0{,}8}$. En efecto,

$$Q_0\, e^{-\,0{,}8} = 320000 \Leftrightarrow Q_0 = \frac{320000}{e^{-\,0{,}8}} \approx 712\ 173\,\text{pesos}$$

Se ve que la maquinaria se ha depreciado en 20 años, más de la mitad de su valor.

[7] En el ámbito de la contabilidad y economía, el término depreciación se refiere a una disminución periódica del valor de un bien material o inmaterial. Esta depreciación puede derivarse de tres razones principales: el desgaste debido al uso, el paso del tiempo y la vejez. También se le puede llamar a estos tres tipos de depreciación; depreciación física, funcional y obsolescencia

5 Modelo de aprendizaje

Las funciones de la forma

$$Q(t) = B - A\, e^{-k \cdot t} \tag{2}$$

donde A, B y k son constantes positivas, se llaman con frecuencia curvas de aprendizaje. El nombre se debe a que los sicólogos descubrieron que funciones de esta forma describen a menudo la relación entre la eficacia con que un individuo realiza una tarea y la cantidad de instrucción o experiencia que dicho individuo ha tenido. Puesto que la variable t, en este modelo, la asociamos al tiempo, entonces el dominio de la función (2) será $\mathbb{R}^{+}$. El gráfico de esta función para valores $A = 3$ y $B = 2.5$ y $k = 0,02$ está dado en la Figura 4.

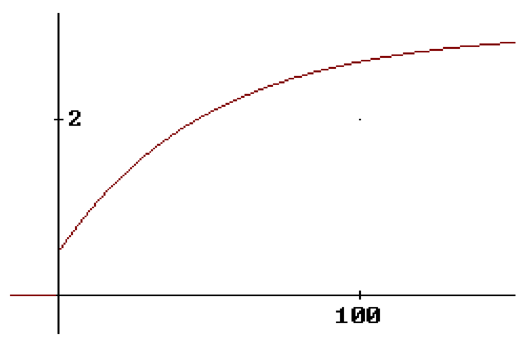


Figura 4

Para dibujar esta curva de aprendizaje u otras (cambiando los valores de los parámetros A, B y C), escriba las siguientes instrucciones en el DERIVE

$\#1\ \ B - A(e\,\hat{}\,(-k\,t))$
$\#2\ Q(t, B, A, k) := B - A(e\,\hat{}\,(-k\,t)) * chi(0, t, \mathrm{inf})$
$\#3\ \ Q(t, 3, 2.5, 0.02)$

La instrucción #2 consiste en "guardar la función enn la letra Q que dependerá de la variable t y los parámetros A, B y k, y además la instrucción $chi(0, t, inf)$ es para definir que el dominio de la variable t estará en el intervalo $[0, \infty)$. Una vez realizado esto, nos posicionamos en la instrucción #3, que entrega los valores de los parámetros, y ordenamos al software que haga la gráfica, que es la que resulta en la Figura 4.

En relación con el gráfico de la Figura 4:

i) Observe que la curva corta, o empieza, en el punto $(0, B - A)$ del eje **Y**. En efecto

$$Q(0) = B - A\,e^{-k\cdot 0} = B - A\,e^{0} = B - A$$

ii) Si $t \to +\infty$, entonces, $e^{-k\cdot t} \to 0$, por lo tanto $Q(t) = B - A\,e^{-k\cdot t} \to B$

Ejemplo 6.

El ritmo al que un empleado postal puede clasificar cartas es una función de la experiencia del empleado (en función del tiempo de hacer el trabajo). El director del correo de Calamorro estimó que después de t meses de experiencia en el trabajo, el empleado medio puede clasificar:

$$Q(t) = 700 - 400\,e^{-0{,}5\,t} \text{ cartas por hora}$$

a) Haga un gráfico de la función modeladora

b) ¿Cuántas cartas puede clasificar por hora un empleado nuevo?

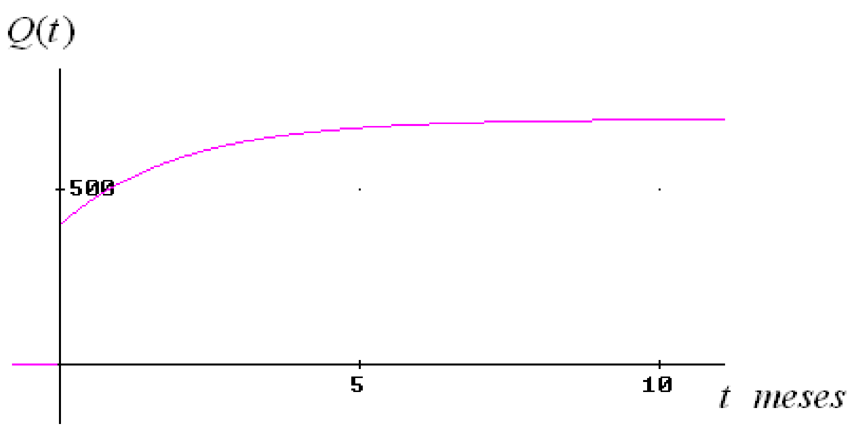
c) ¿Cuántas cartas puede clasificar por hora un empleado con 6 meses de experiencia?

d) Aproximadamente, ¿cuántas cartas podrá clasificar por hora, como máximo un empleado medio?

Solución. a) En el DERIVE, basta graficar la función que ya habíamos definido entregando los nuevos parámetros

$$Q(t, 700, 400, 0.5)$$

y la gráfica luciría de la siguiente forma:



b) Puesto que un empleado nuevo tiene tiempo de experiencia cero, el número de cartas que podrá clasificar es:

$$Q(0) = 700 - 400\, e^{-0.5 \cdot 0} = 700 - 400 = 300$$

c) Después de una experiencia de 6 meses el empleado podrá clasificar:

$$Q(6) = 700 - 400\, e^{-0.5 \cdot 6} = 700 - 400\, e^{-3} \approx 680 \text{ cartas por hora}$$

d) Es obvio que la experiencia del empleado crece a medida que pasa el tiempo. En consecuencia cuando t crece sin límite, es decir, cuando $t \to +\infty$, resulta

$$Q(t) = 700 - 400\, e^{-0.5 \cdot t} \to 700$$

puesto que si $t \to +\infty$, etonces,

$$400\, e^{-0.5 \cdot t} = \frac{400}{e^{0.5 \cdot t}} \to 0$$

6 El modelo logístico

Las curvas logísticas son modelos bastantes precisos para analizar el crecimiento de una población cuando los factores ambientales imponen ciertas condiciones, es decir, cuando imponen un límite superior en el tamaño posible de la población. Estas curvas describen además la propagación de epidemias en una comunidad, así como la propagación de un rumor, o la saturación en la compra de un determinado artículo tecnológico.

El gráfico de una función de la forma

$$N(t) = \frac{B}{1 + A\, e^{-k \cdot t}}$$

donde A, B y k son constantes positivas se puede realizar en el DERIVE escribiendo las siguientes instrucciones:

$$\#1 \;\; N(t, B, A, k) := \; (B \,/\, (1 + A\, e \,\hat{}\, (-k\, t)))$$

indicando con esto que está guardada la función logística cuya variable es t de parámetros A, B y k. Podemos hacer

$$\#2 \;\; N(t, 5, 2, 0.1)$$

y graficar esta función. Presentamos la gráfica en la Figura 6.

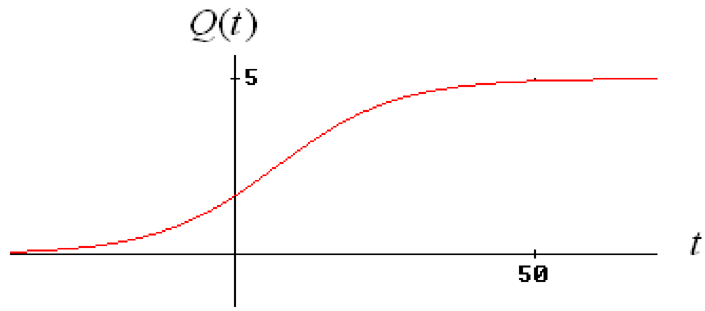


Figura 6

i) Observe que la curva corta al eje Q en el punto $(0, B/\ (1+A))$, en nuestro ejemplo en el punto $(0, 5/3)$. En efecto, si $t=0$, entonces:

$$N(0) = \frac{B}{1 + A\,e^{-k\cdot 0}} = \frac{B}{1+A} = \frac{5}{1+2} = \frac{5}{3}$$

ii) Para hallar el punto donde la curva corta al eje t, hacemos $N(t)=0$. Se puede ver fácilmente que:

$$\frac{B}{1 + A\,e^{-k\cdot t}} \neq 0 \text{ para todo } t$$

En consecuencia no corta al eje t.

iii) Por otra parte si $t \to +\infty$, entonces, $A\,e^{-k\cdot t} \to 0$. Por lo tanto

$$\frac{B}{1 + A\,e^{-k\cdot t}} \to B$$

iv) Finalmente si $t \to -\infty$, entonces $A\,e^{-k\cdot t} \to +\infty$, y por lo tanto:

$$\frac{B}{1 + A\,e^{-k\cdot t}} \to 0$$

Ejemplo 7.

Los registros de salud pública, del año 1956, de la ciudad de Inca del Plata, muestran que t semanas después de una rara forma de gripe (influenza), aproximadamente

$$N(t) = \frac{20}{1 + 19\,e^{-1.2\cdot t}} \text{ en cientos de personas}$$

habían sufrido la enfermedad.

a) ¿Cuántas personas tenían la enfermedad cuando esta brotó?

b) ¿Cuántas personas tenían la gripe al final de la segunda semana?

c) ¿Si la tendencia continúa, cuántas personas contraerán la enfermedad?

Solución. a) Cuando la enfermedad empezó a desarrollarse, es decir en el momento $t = 0$:

$$N(0) = \frac{20}{1 + 19\,e^{-1.2\cdot 0}} = \frac{20}{1+19} = 1$$

Es decir, 100 personas ya tenían la enfermedad.
b) Después de dos semanas, es decir, $t = 2$:

$$N(2) = \frac{20}{1 + 19\,e^{-1.2\cdot(2)}} = 7,343$$

Esto es, 734 personas habían contraido la enfermedad.
c) Al continuar la tendencia, es decir, cuando $t \to \infty$, entonces $19\,e^{-1.2\,t} \to 0$, de lo cual resulta que:

$$N(t) = \frac{20}{1 + 19\,e^{-1.2\cdot t}} \to 20$$

Por lo tanto, a lo más 2000 personas contrajeron la enfermedad.

La Figura 7 muestra la evolución de las personas enfermas en la ciudad Inca del Plata.

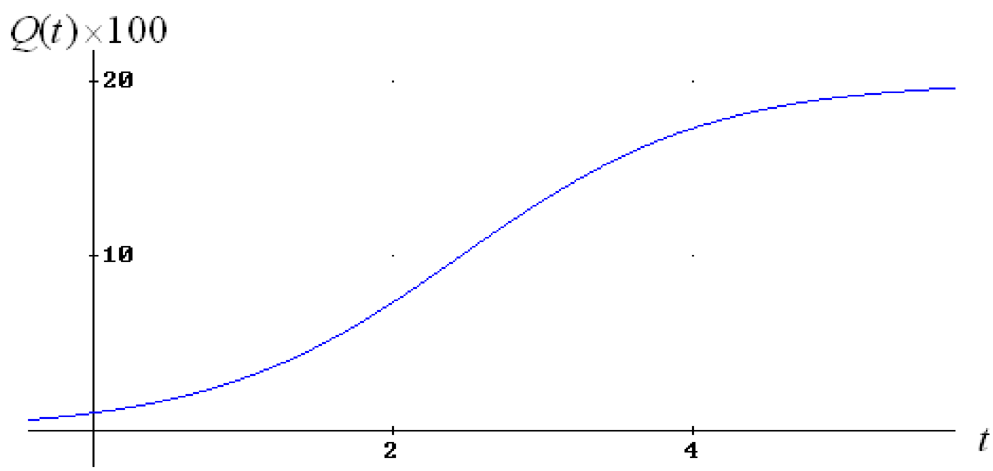


Figura 7