La Clase sobre rectas y parábolas: demandas, costos y utilidad

Eliseo Martínez*

2 de mayo de 2018

Resumen

Se modela un proceso de demanda simple mediante la ecuación de una recta, que está definida sobre el precio eventual del producto. Se determina la función de costo mediante el valor para producir la unidad, que se llama costo variable, más el costo fijo que tiene la producción. Para la obtención del precio óptimo se hace en base a maximizar la función de utilidad, cuya modelación es una función cuadrática

1. La función demanda

Supongamos que mediante un estudio de mercado o a veces por simple intución, una (pequeña) empresa piensa que puede vender N unidades de su producción en un mes, por ejemplo $N = 900$, esto es a lo más aspira a que la demanda sea de N (=900) unidades mensuales. Esta empresa quiere poner un precio óptimo, p, a su unidad, pero sabe que a medida que el precio crece va a ocurrir una disminución en su demanda, y conforme a lo que percibe en el mercado sabe que a partir de un precio p^* no habrá demanda para su producto, por ejemplo $p^* = 8{,}000\,[\frac{\$}{unidad}]$ (ocho mil pesos por unidad). El razonamiento para modelar la función demanda es la siguiente: Si el precio es muy bajo existirá una alta demanda llegando a las $N = 900$ unidades, es decir el precio bajo lo aproximamos a 0, de modo que tenemos un punto $(0, N)$, y ahora si vendemos el artículo al precio de p^* el artículo no será demandado, entonces tenemos el punto $(p^*, 0)$. Luego la variable precio p deberá ser un valor entre 0 y p^*, y se sabe que a medida que el precio aumente en este dominio la demanda será decreciente, entonces formamos el modelo más sencillo, la recta que une estos dos puntos. Observemos la Figura 1, en ella el eje Y denota el número de unidades demandadas, y el eje X el precio en \$ chilenos por unidad. Y la ecuación de la recta $y = mx + b$ que contiene a este segmento se calcula, primero, la pendiente

*Trabajo financiado por el Proyecto de Docencia: Hacer y corregir en los procesos de evaluación, 2017

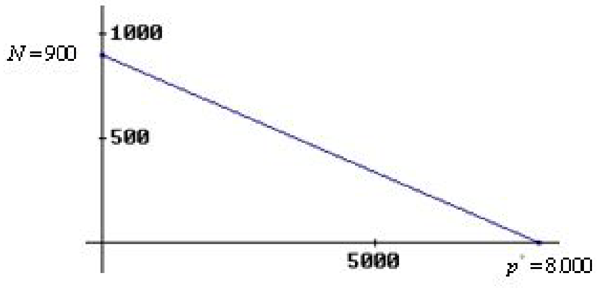

Figura 1: Modelo de segmento de recta para la demanda

m [1]

$$m = -\frac{N}{p^*} = -\frac{900}{8000} = -0{,}1125$$

puesto que el ángulo cae en el segundo cuadrante, y allí la tangente es negativa (recuerde las funciones trigonmétricas en el círculo unitario), y, en segundo lugar, el valor de b es el valor del corte en el eje Y, esto es

$$b = 900$$

y en consecuencia el modelo lineal[2] para esta demanda es

$$d = -\frac{N}{p^*} \cdot p + N;\ 0 \leq p \leq p^* \tag{1}$$

Y con los valores entregados, nos queda

$$d = -0{,}1125 \cdot p + 900;\ 0 \leq p \leq 8000$$

2. La función de costo

La elaboración de una unidad del producto tiene un costo de producción o elaboración [3] de una cantidad de p_e pesos por unidad, de modo que para elaborar d unidades el costo seá de

$$p_e \cdot d$$

[1]La pendiente no es nada más que la tangente del ángulo agudo que se forma entre la recta y el eje X

[2]Cambiamos las letras y por d, y la letra x por p

[3]Suponga que esta pequeña empresa realiza platos de colación

Por otro lado, independientes de las unidades a elaborar, vamos a suponer un costo fijo [4] de p_f. Las unidades de p_e y p_f son de $[\frac{\$}{Unidades}]$ y [$], respectivamente. Luego la función de costo asociado a la producción de d unidades es de

$$C(d) = p_e \cdot d + p_f$$

En consecuencia la función de costo, C, asociada al precio de venta que la empresa desea encontrar de forma óptima, en virtud de la ecuación (1), es de

$$C(p) = p_e \cdot (-\frac{N}{p^*} \cdot p + N) + p_f \tag{2}$$

Supongamos que $p_e = 1500$ pesos por unidad, y $p_f = 18000$ pesos, con los valores de $N = 900$ y $p_* = 8000$, la ecuación (2) queda como

$$C(p) = 1500 \cdot (-0{,}1125 \cdot p + 900) + 18000 \tag{3}$$

3. La función utilidad

El ingreso, I, por el volumen de demanda será de

$$p \cdot d$$

y en consecuencia la ecuación básica para la utilidad, U es de

$$U = I - C$$

De modo que la utilidad en función del precio p es

$$U(p) = I(p) - C(p) = p \cdot (-\frac{N}{p^*} \cdot p + N) - p_e \cdot (-\frac{N}{p^*} \cdot p + N) - p_f \tag{4}$$

En esta ecuación reemplazamos por los valores ya establecimos y obtenemos la función cuadrática

$$U(p) = -0{,}1125p^2 + 1068{,}75p - 1{,}368 \cdot 10^6 \tag{5}$$

cuya gráfica se muestra en la Figura 2. Es claro que la utilidad máxima está en el vértice de la parábola, y este vértice es obtenido de la manera usual, esto es

$$U(p) = -0{,}1125(p^2 - \frac{1068{,}75}{0{,}1125}p + \frac{1{,}368}{0{,}1125}10^6)$$

y en consecuencia la abcisa del vértice es

$$\frac{1068{,}75}{2 \cdot 0{,}1125} = 4750$$

y la utilidad máxima es

$$U(4750) = 1170289{,}25$$

En conclusión el precio óptimo es de 4750 pesos por unidad obteniendo la utilidad máxima mensual de 1170289.25 pesos.

[4] Costo asociado al arrendamiento del local, cámaras de vigilancia, sueldo del personal

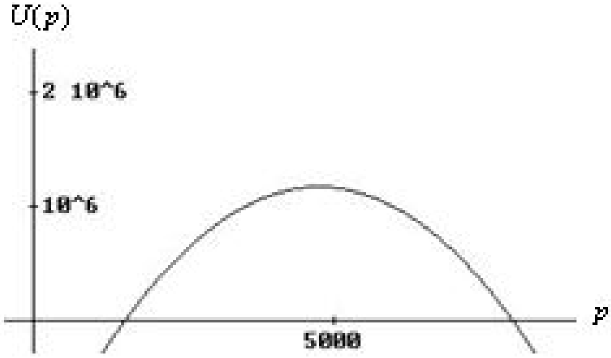

Figura 2: Gráfica de $U(p) = -0{,}1125p^2 + 1068{,}75p - 1{,}368 \cdot 10^6$

4. Un resultado extremadamente sencillo

Observemos que la función cuadrática en (4) se puede expresar como

$$U(p) = -\frac{N}{p*}p^2 + (N + N\frac{p_e}{p^*})p - p_eN - p_f$$

y en consecuencia con cierta manipulación algebraica se tiene que el vértice de la parábola de esta función cuadrática es

$$\Big(\frac{p^* + p_e}{2}, U\big(\frac{p^* + p_e}{2}\big)\Big)$$

5. Ejercicio

Determine la función de costo asociado a este precio de venta óptimo con los valores entregados, y realice el gráfico de la función de costo dado en (3). Recuerde que el dominio para todas las funciones involucradas en este modelo es $0 \leq p \leq p^*$

Referencias

[1] Apuntes del curso