Razón porcentual de cambio y razones relacionadas

Eliseo Martínez, Manuel Barahona

Diciembre 2015

1. Razón porcentual de cambio

En muchaa situaciones prácticas, la razón de cambio de una cantidad[1] no es significativa como su razón porcentual de cambio. Esto es la comparación entre $f(t)$ y $f'(t)$ midiendo el porcentaje de $f(t)$ respecto de $f'(t)$, a saber

$$\frac{f'(t)}{f(t)} \cdot 100 \tag{1}$$

Observemos que las "unidades de $f'(t)\,/\,f(t)$ tiene unidades de frecuencia, esto es

$$1\,/\,unidades\ de\ t$$

Supongamos, a manera de ejemplo, que un ritmo de cambio[2] anual en una población es de 500 personas por año, en una ciudad de 5 millones de personas en un determinado año, este cambio sería despreciable, mientras que el mismo ritmo de cambio puede tener un impacto enorme en un pueblo de 2 mil personas.

Matemáticamente el ritmo porcentual de cambio, $R_Q(t)$ de una función $Q(t)$ que depende del tiempo se puede definir como

$$R_Q(t) = \frac{d \ln\, Q(t)}{dt} \cdot 100$$

puesto que, como veremos más adelante la ecuación (1) se puede obtener como

$$\frac{d \ln\, Q(t)}{dt} = \frac{Q'(t)}{Q(t)}$$

Ejemplo 1.

El producto nacional bruto (PNB) de un cierto país era de $P(t) = t^2 + 5t + 100$ billones de dólares en t años a partir del año 1975 (año cero, esto es 1975 corresponde a $t = 0$) a) ¿A qué ritmo estaba cambiando el PNB en el año 1975? b) ¿A qué razón porcentual de cambio estaba variando el PNB en el mismo año?

Solución. a) El ritmo de cambio del PNB es la derivada $P'(t) = 2t + 5$. Por lo tanto el ritmo de cambio en el año 1975 es:

$$P'(5) = 2 \cdot 5 + 5 = 15 \text{ [billones de dólares por año]}$$

---

[1] La razón de cambio no es más que la derivada, esto es

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

[2] Nuevamente la expresión "ritmo de cambio" significa derivada en un instante determinado. Lo que sucede es que la expresión se refiere a que estamos trabajando con funciones cuya variable es el tiempo.

b) La razón porcentual de cambio del PNB en 1975 es de:

$$R_P(5) = \frac{P'(5)}{P(5)} \cdot 100 = \frac{15}{150} \cdot 100 = 10 \text{ [por ciento por año]}$$

En consecuencia el PNB cambió en un 10 por ciento en 1975.

2. Razones relacionadas

Existen muchas aplicaciones de la derivada, provenientes de la naturaleza, en que una cierta cantidad viene dada como una función de una variable, la cual a su vez, puede ser definida como una función de una segunda variable. Verbigracia, supongamos que $y = f(x)$ lo que significa que la variable y depende (funcionalmente) de la variable x pero además la variable $x = x(t)$, diciendo con esto que la variable x depende funcionalmente de la variable t (que por lo general t representa el tiempo). De modo que tenemos el modelo $y = f(x(t))$, y nuestro interés es conocer la variación de y respecto de t, esto es dy/dt. Aplicando la regla de la cadena, tenemos que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt}$$

donde la interpretación de $\frac{dx}{dt}$ es, por lo general, la velocidad o razón de cambio de $x(t)$.

Ejemplo 2.

Supongamos que se está inflando un globo esférico y su radio crece a razón de 0.2 $[\frac{cm}{seg}]$[3] cuando el radio es de 5 centímetros.¿A qué razón crece el volumen del globo en el mismo instante en que el radio es de 5 centímetros?

Solución. Observemos que, por efecto dinámico, el volumen de la esfera, que depende del radio, está variando toda vez que el radio varía a través del tiempo, esto es, $r = r(t)$, y puesto que por la regla de la cadena

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt}$$

y como la relación funcional entre el volumen de una esfera y su radio es

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi\ (r(t))^3$$

se tiene que

$$\frac{dV(t)}{dt} = 4\pi \cdot (r(t))^2 \cdot \frac{dr(t)}{dt}$$

entonces

$$\frac{dV(t_0)}{dt} = 4\pi \cdot (r(t_0))^2 \cdot \frac{dr(t_0)}{dt} = 4\pi \cdot 25 \cdot 0.2 \approx 62.83\ [\frac{cm^3}{seg}]$$

Por lo tanto el volumen del globo crece a razón de 62.83 $[\frac{cm^3}{seg}]$ en el preciso instante, t_0, en que su radio es de 5 centímetros.

[3] En estricto rigor deberíamos decir: ”y su radio crece con una velocidad de 0.2 centímetros por segundo en el poreciso instante en que su radio es de 5 centímetros”.

2.1 El modelo pitagórico

El modelo didáctico más majaderamente utilizado en algunos libros y apuntes de Cálculo es utilizar las ”razones relacionadas” bajo las condiciones de un triángulo rectángulo donde la hipotenusa permanece constante. Supongamos un triángulo rectángulo de catetos x e y con hipotenusa constante c. De modo que se tiene la relación funcional

$$x^2 + y^2 = c$$

Suponga ahora que $x = x(t)$ e $y = y(t)$, es decir ambos catetos se moverán a través del tiempo (mediante algún procedimiento ficticio que dependerá de la improvisación o astucia del que va a crear el problema), de modo que tenemos la relación funcional

$$(x(t))^2 + (y(t))^2 = c$$

derivando (y aplicando la regla de la cadena) obtenemos

$$2x(t) \cdot x'(t) + 2y(t) \cdot y'(t) = 0$$

Si estamos interesados en calcular $y'(t)$ en algún valor de $t = t_0$, lo despejamos de la igualdad anterior obteniendo

$$y'(t) = -\frac{x(t) \cdot x'(t)}{y(t)} = \frac{x(t) \cdot x'(t)}{\sqrt{c - (x(t))^2}}$$

y solo basta ”entregar adecuadamente”[4] los valores de $x(t_0)$ y $x'(t_0)$ para obtener $y'(t_0)$.

El mismo modelo anterior, esto es el triángulo rectángulo, se puede hacer variar la hipotenusa, pero dejando fijo un cateto, y razonando de manera análoga *mutatis mutandis*.

[4] Esto de ”adecuadamente” pasa a traducirse en una gama de barcos que se alejan al norte y al oeste manteniendo la misma distancia, o escaleras que por embrujo se caen, o niños levantando volantines y contra todas las leyes de la hidrodinámica quedan suspendidos a una misma altura, y un largo etcétera...