Derivadas para estudiantes de economía

Eliseo Martínez H.

Noviembre 2015

Abstract

A partir de una función regular con cierta simetría se inicia el estudio de monotonía (creciente o decreciente), mínimos y máximos y puntos de inflexión. Luego de esto, se inicia el estudio de la derivada de funciones.

1 Puntos a estudiar

Para nuestro estudio consideremos la función

$$f(x) = \frac{x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 10}{2} \quad ; \; 0 \leq x \leq 4 \tag{1}$$

cuya gráfica luciría como la dada en la Figura 1.

Observemos que esta función tiene ciertas regularidades. En efecto, hay una región del conjunto $[0, 4]$, donde está definida $f(x)$, en que la función es creciente, y otra región en que es decreciente. Notemos que en la región $[0, 2]$ donde la función es decreciente y luego vuelve a crecer, aparece un cierto punto, de momento desconocido, en que la función $f(x)$ alcanza el menor valor en este intervalo $[0, 2]$. Se dice que allí existe un mínimo. De manera análoga, podemos notar que en el intervalo $[1, 3]$, la función es creciente y luego decreciente, de modo que en ese intervalo, $[1, 3]$, la función tiene un valor máximo (que al parecer, pero solo al parecer, ese máximo se alcanza en $x = 2$). Y finalmente en la región $[2, 4]$ la función primero es decreciente y luego vuelve a crecer, de modo que hay un cierto valor en $[2, 4]$ en que la función $f(x)$ tiene un valor mínimo. Por lo menos, visualmente y por lo que entrega la gráfica, podemos determinar aproximadamente estos valores

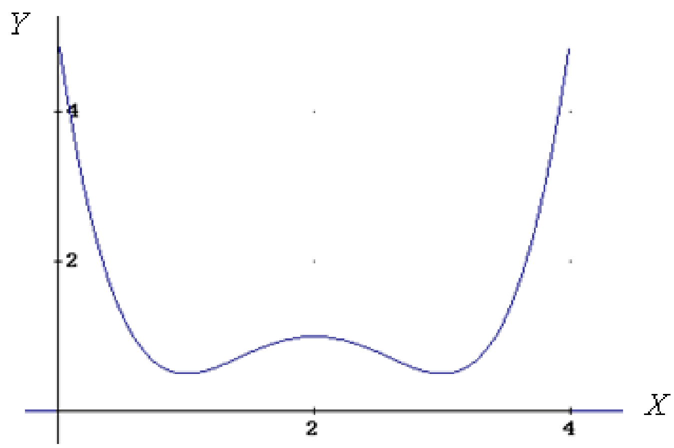

Figure 1:

mínimos y el valor máximo en las regiones descritas. Es cuestión crucial en economía matemática encontrar estos valores máximos y mínimos. Pero hay otros puntos importantes.

Acerquemos el gráfico, haciendo un zoom, para decribir la función en la región en que visualmente hay un mínimo y un máximo, elijamos discrecionalmente la región descrita por la Figura 2.

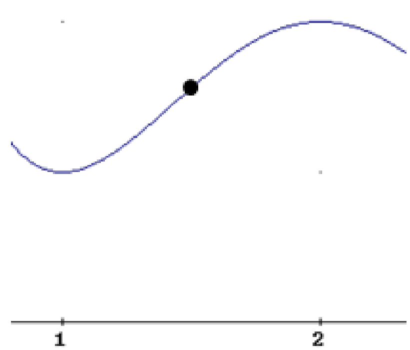

Figura 2

Allí podemos observar que, necesariamente, hay un punto que "frena" el movimiento del desplazamiento que toma la función a partir del punto mínimos para poder llegar al máximo, que geométricamente es el punto donde la gráfica de la curva cambia su "concavidad". Este punto de cambio es precisamente llamada punto de inflexión. Entre el mínimo y el máximo que ocurre a la derecha del gráfico de la Figura 1 hay otro punto de inflexión.También cuestión crucial en economía matemática encontrar estos puntos de inflexión.

Nuestro objetivo, entonces, es calcular las coordenadas de los siguientes puntos que indica la gráfica de la Figura 3.

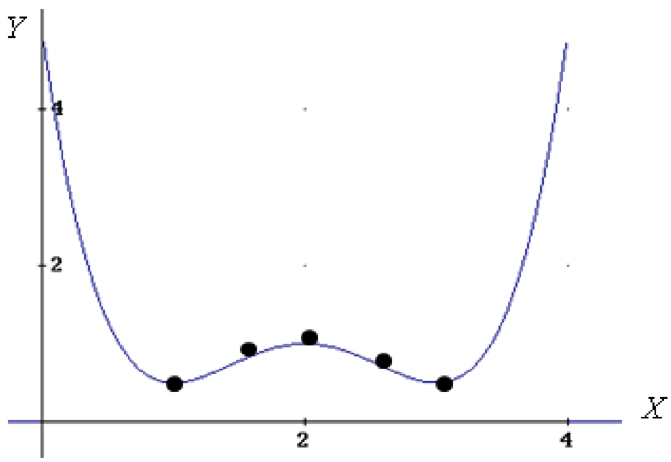

Figura 3

2 La recta tangente

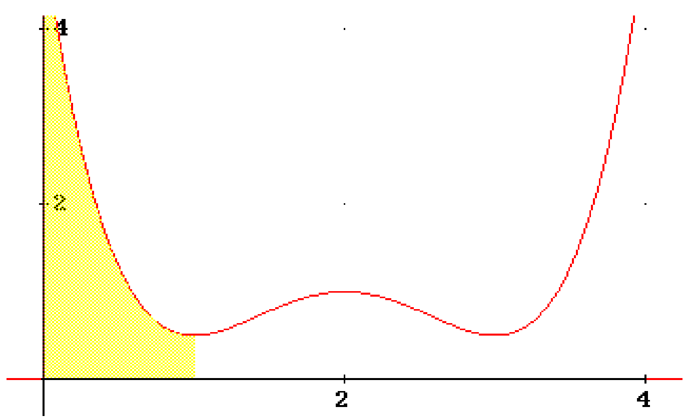

Figura 4

En la Figura 4 se muestra un sector del dominio donde la función (1) es decreciente. Si consideramos dos puntos en este sector de la gráfica y trazamos la recta que une esos dos puntos, se tendrá que la pendiente de esta recta es negativa, como lo denuncia la Figura 5.

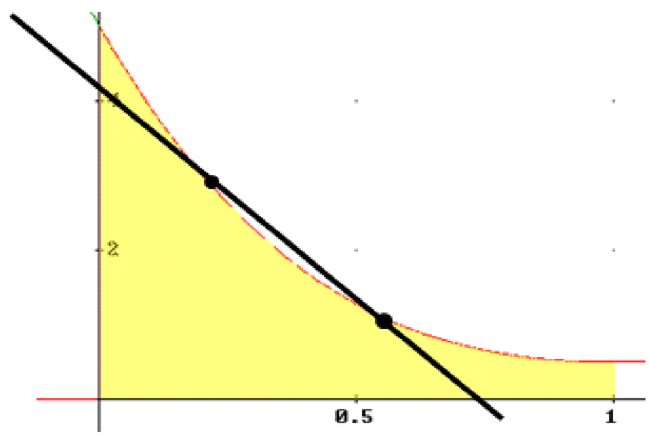

Figura 5

Consideremos dos puntos del intervalo $[0, 4]$ donde la función es decreciente, por ejemplo los valores $x = 0.3$ y $x = 0.5$, de modo que podemos calcular la recta que pasa por los puntos $(0.3,\ f(0.3))$ y $(0.5, f(0.5))$, y esta recta se calcula mediante la ecuación

$$\frac{y - f(0.5)}{x - 0.5} = \frac{f(0.5) - f(0.3)}{0.5 - 0.3} \tag{2}$$

esto es

$$\frac{y - f(0.5)}{x - 0.5} = -\frac{628}{125} = -5.024$$

Hacemos notar que, como suponiamos, la recta en ese dominio tiene pendiente negativa, y su ecuación final es

$$y = -5.024x + 3.79325$$

Vamos a tomar un valor más próximo a $x = 0.5$, a saber $x = 0.4$. La ecuación de la recta que pasa por estos dos puntos, esto es $(0.4,\ f(0.4))$ y $(0.5, f(0.5))$viene dada por

$$\frac{y - f(0.5)}{x - 0.5} = \frac{f(0.5) - f(0.4)}{0.5 - 0.4} \tag{3}$$

y haciendo los cálculos pertinentes obtenemos la recta

$$y = -4.3555 \cdot x + 3.459$$

Note que su pendiente es negativa. Nos vamos a acercar al punto $x = 0.5$ de una manera muchísimo más cerca, por ejemplo $x = 0.49$. Obtengamos la ecuación de la recta que pasa por estos dos puntos, a saber $(0.49,\ f(0.49))$ y $(0.5, f(0.49))$,obtenemos

$$\frac{y - f(0.5)}{x - 0.5} = \frac{f(0.5) - f(0.49)}{0.5 - 0.49} \tag{4}$$

y volviendo a hacer los cálculos pertinentes, nos queda la recta

$$y = -3.807800499 \cdot x + 3.185150249$$

Hagamos una última aproximación a $x = 0.5$ mediante $x = 0.4999$, y calculemos la recta que pasa por estos dos puntos

$$\frac{y - f(0.5)}{x - 0.5} = \frac{f(0.5) - f(0.499)}{0.5 - 0.499} \tag{5}$$

y obtenemos la recta

$$y = -3.750575000 \cdot x + 3.156537500$$

Si observamos con atención el calculo de las pendientes de las cuatro rectas dadas en las ecuaciones (2), (3),(4) y (5) podemos observar una regularidad espectacular descubierta por Isaac Newton en 1666 (*annus mirabilis*) y redescubiertas por usted en este año. En efecto, obsserve que las aproximaciones al punto $x = 0.5$ para el cálculo de las pendientes determinadas por el lado derecho de las cuatro ecuaciones citadas, se puede resumir mediante

$$\frac{y - f(0.5)}{x - 0.5} = \frac{f(0.5) - f(0.5 - h)}{0.5 - (0.5 - h)} = \frac{f(0.5) - f(0.5 - h)}{h}$$

Y entonces surge la pregunta ¿cuál es el valor de $\frac{f(0.5) - f(0.5-h)}{h}$ cuando h tiende a ser cada vez más próximo a cero. En el lenguaje matemático, debemos calcular

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0.5) - f(0.5 - h)}{h}$$

Si evaluamos la función dada en (1) aplicada al valor $x = 0.5 + h$ obtenemos

$$f(0.5 - h) = \frac{16h^4 - 96h^3 + 184h^2 - 120h + 41}{32}$$

y en consecuencia, puesto que $f(0.5) = 41/32$, obtenemos

$$\frac{f(0.5) - f(0.5 - h)}{h} = \frac{2h^3 - 12h^2 + 23h - 15}{4}$$

Ahora haciendo $h \to 0$, que significa haciendo h tan pequeño como queramos, se tiene que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0.5) - f(0.5 - h)}{h} = -\frac{15}{4}$$

De este modo podemos construir la recta con pendiente $-15/4$ y que pase por el punto $(0.5,\ f(0.5) = (0.5,\ 41/32)$ mediante

$$\frac{y - f(0.5)}{x - 0.5} = -\frac{15}{4}$$

y así obtenemos la recta

$$y = -\frac{15}{4} + \frac{101}{32} = -3.75x + 3.15625 \tag{6}$$

La ecuación de la recta en (6) corresponde a la recta que es tangente a la curva de la función (1) que pasa por el punto $(0.5,\ f(0.5)$. Si nos aproximanos por la derecha de $x = 0.5$, esto es mediante $x = 0.5 + h$, obtendríamos la misma ecuación de la recta (hágalo como ejercicio). En la Figura 6 se muestra tanto el gráfico de la función (1) como el gráfico de la recta (6) que es tangente a la curva en el punto $(0.5,\ f(0.5)$.

2.1 El cociente de Newton

Para el cálculo de la recta tangente en (6) fue necesaria el cálculo de [1]

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0.5) - f(0.5 + h)}{h}$$

[1] Aquí el valor de h se puede aproximar tanto por la izquierda como por la derecha del cero y se obtiene la misma recta, es por eso que vamos a usar la expresión $0.5 + h$, entendiendo que h puede ser positivo o negativo.

El coeciente

$$\frac{f(a) - f(a+h)}{h}$$

donde a es cualquier valor del dominio de la función $f(x)$, excepto los valores extremos del intervalo donde está definida la función, se llama cociente de Newton. Y si existe el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a) - f(a+h)}{h} \tag{7}$$

entonces se dice que el valor dado en (7) es la derivada de la función $f(x)$ en el punto $x = a$ y se denota por

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a) - f(a+h)}{h} = f'(a)$$

2.2 El cálculo de la derivada en el DERIVE

Desde su creación, año 1666, el calculo de la derivada de una función es una herramienta formidable para la comprensión de la naturaleza, incluso en algunos casos para modelar la naturaleza humana. Eneste milenio, cualquier persona puede calcular la derivada de una función, pero no cualquier persona puede entender su significado y su aplicación. Vamos a asegurarnos que usted puede calcular la derivada desde un punto de vista conceptual.

2.2.1 La función $f(x)$, grafíquela.

Supongamos que usted está trabajando con una función $f(x)$ que interpreta algún modelo, o simplemente es una función para que usted practique el concepto de la derivada. Usted debe definirla y graficarla en el derive. Veamos con un ejemplo. El profesor desea que usted estudie la función $x^3 + x^2 - 1$. Entonces usted deberá hacer lo siguiente en el software DERIVE

$$\#1 \quad f(x) := x^3 + x^2 - 1$$

y luego graficarla de la manera usual, el resultado dería lucir del siguiente modo:

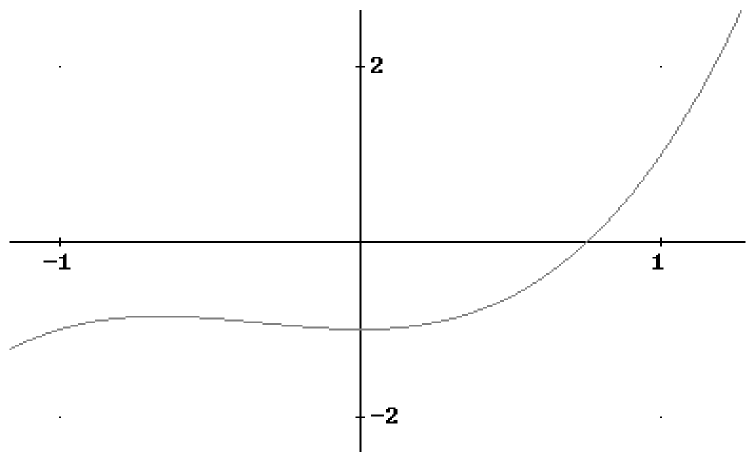

Figura 6

2.3 Exprese el cociente de Newton

Una vez realizado esto, escribir la siguiente expresión

$$\#2 \qquad (f(a+h) - f(a))/h$$

y de este modo calculamos el cociente de Newton, y al oprimir el icomo = debe aparecer la expresión

$$\#3 \qquad 3a^2 + a(3h+2) + h^2 + h$$

2.4 Límite del cociente de Newton para h$\rightarrow 0$

luego a esta expresión #3, con el ícono de lim calcula usted el límite cuando h tiende a cero (elija la opción "ambas en la caja de diálogo que aparecerá), esto es

$$\#4 \quad \lim_{h \to 0} 3a^2 + a(3h+2) + h^2 + h$$

y el resultado será

$$\#5 \quad 3a^2 + 2a$$

De este modo la derivada de la función $f(x) = x^3 + x^2 - 1$ en el punto $x = a$ tiene el valor de $3a^2 + 2a$. Y su signficado se resume en los siguientes puntos:

- la recta tangente a la curva $f(x) = x^3 + x^2 - 1$ que pasa por el punto $(a, f(a))$ tiene pendiente $m = 3a^2 + 2a$
- de otra forma la ecuación de tal recta es $y = 3a^2 + 2a(x - a) + f(a)$
- lo anterior emana de la ecuación

$$\frac{y - f(a)}{(x - a)} = 3a^2 + 2a$$

- la derivada de $f(x)$ en $x = a$, que es la pendiente de la recta tangente, confirmará si en los "alrededores" de $x = a$ la función es creciente o decreciente.

3 Volviendo a la función original

Volvamos a nuestra función dada en (1) y repliquemos los pasos dados en la sección anterior, esto es

$$f(x) = \frac{x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 10}{2} \quad ; \; 0 \leq x \leq 4$$

de modo que para cualquier $a \in (0, 4)$ se tiene que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = 2(a^3 - 6a^2 + 11a - 6)$$

Esto significa que la derivada de la función $f(x)$ definida como en (1) en cualquier punto $a \in (0, 4)$ es (y se denota por)

$$f'(a) = 2a^3 - 12a^2 + 22a - 12$$

y esto significa que en cualquier punto $a \in (0, 4)$, la recta tangente a la curva $f(x)$ en ese punto a viene dada por

$$y = f'(a)(x - a) + f(a) \tag{8}$$

Este es uno de los resultados más espectaculares dado por Newton, puesto que su aplicación es la siguiente: La función $f(x)$, que tenga derivada en cualquiera de sus puntos interiores se pued aproximar mediante la recta dada en (8) siendo válida la aproximación en valores "cercanos" de a.