La ley de conservación de masa

Eliseo Martínez

7 de junio de 2023

Resumen

Mostraremos un ejemplo $\int\int_S \overrightarrow{F} \cdot \widehat{n}\ dS$ de la integral de un campo vectorial sobre una superficie aplicado al movimiento de un fluido y el teorema de la divergencia para encontrar la formulación metemática de la ley de conservación de masa.

Consideremos el flujo de un fluido a través de una superficie cerrada S, que supondremos fija en el espacio. Sea $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ la velocidad del fluido y sea ρ la densidad del fluído, ambos pueden variar tanto en el espacio como en el tiempo, esto es

$$\overrightarrow{\mathbf{v}} = \overrightarrow{\mathbf{v}}(x, y, z, t), \quad \rho = \rho(x, y, z, t) \tag{1}$$

El flujo a través de la superficie está determinada examinando primeramente el flujo de salida a través de un elemento dS de superficie, como se muestra en la Figura 1. En un incremento de tiempo dt el fluido que pasa a través de dS con una velocidad normal a la superficie $\overrightarrow{\mathbf{v}} \cdot \widehat{\mathbf{n}}$ llenará un pequeño cilindro de longitud

$$dl = \overrightarrow{\mathbf{v}} \cdot \widehat{\mathbf{n}}\ dt$$

El volumen dV de un fluido en este elemento cilíndrico es el producto del área dS y longitid dl, esto es

$$dV = \overrightarrow{\mathbf{v}} \cdot \widehat{\mathbf{n}}\ dS\ dt$$

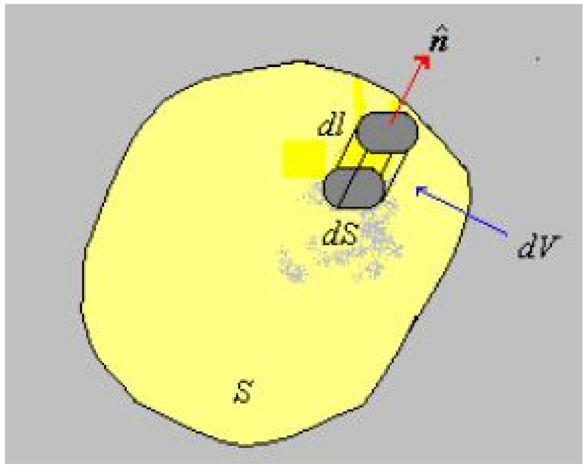
Además, el incremento de masa dm que fluye fuera del elemento de superficie dS en un tiempo dt está dada por la ecuación (4), de modo que la razón en la cual la masa entra por la supeficie S es

$$\frac{dM}{dt} = -\int\int_S \rho \overrightarrow{\mathbf{v}} \tag{2}$$

$$dm = \rho\ dV = \rho(\overrightarrow{\mathbf{v}} \cdot \widehat{\mathbf{n}})\ dS\ dt$$

La suma de todos los incrementos de masa dm, por cada elemento de superficie dS, formará el incremento de masa total dM que fluye fuera de la superficie cerrada S en un tiempo infinitesimal dt. Notemos que los elementos dm son en un sentido doblemente pequeños porque aún cuando se sume ellos solo contribuyen a la masa incremental dM. La suma de estos dm nos da

$$dM = dt \int\int_S \rho(\overrightarrow{\mathbf{v}} \cdot \widehat{\mathbf{n}})\ dS \tag{3}$$



$Figura 1$

de modo que la razón de masa que pasa a través de S es

$$\frac{dM}{dt} = \int\int_S \rho(\overrightarrow{\mathbf{v}} \cdot \widehat{\mathbf{n}}) \tag{4}$$

Esta superficie de integral describe el flujo de la masa transportada por el vector $\rho\overrightarrow{\mathbf{v}}$ a través de S. Ua ley que gobierna los fenómenos de los fluidos macroscópicos es la *ley de conservación de masa*, que establece que la masa ni es creada ni destruída. La formulación matemática de esta regla es desarrollada desde sus implicaciones estudiando el flujo a través de una supeficie cerrada S que yace completamente en el medio material del fluido (observe la Figura 2). La referencia fija o superficie cerrada de control S, que contiene un volumen V, es virtual, una entidad puramente geométrica, que en nada afecta el movimiento del fluido. En otras palabras el fluido pasa a través de S sin obstáculo. La conservación de masa asegura, entonces, que la razón a la cual el fluido entra hacia V a través de S debe ser igual a la razón en que la masa se acumula dentro de V. Vamos a trasladar esta ecuación en palabras a un simbolismo matemático apropiado.La masa total dentro del volumen V en cualquier tiempo t es

$$M = \int\int\int_V \rho \; dV \tag{5}$$

y en este tiempo la razón de cambio es

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt}\int\int\int_V \rho \; dV = \int\int\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t} \; dV \tag{6}$$

puesto que el volumen V es fijo. Y esta es la razon en que el fluido entra hacia V a través de S. Veremos ahora la otra mitad de la ecuación. Sabemos que el

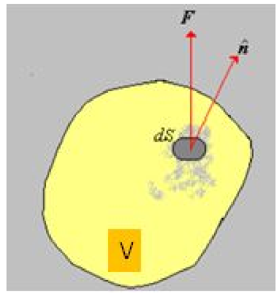


Figura 2

elemento de masa dM que fluye hacia afuera a través de S está dada por

$$\frac{dM}{dt} = -\int\int_S \rho \overrightarrow{\mathbf{v}} \cdot \widehat{\mathbf{n}} \, dS \tag{7}$$

Y esto nos da la otra mitad de la ecuación. Las razones descritas en (6) y (7) deben ser iguales, y consecuentemente por la ley de conservación de masa obtenemos

$$\int\int\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV + \int\int_S \rho \overrightarrow{\mathbf{v}} \cdot \widehat{\mathbf{n}} \, dS = 0 \tag{8}$$

La ecuación (8) es verdadera para cualquier superficie cerrada arbitraria S que contiene un volumen V. Ahora, entonces, aplicamos el teorema de la divergencia a la segunda integral de superficie y la llevamos a volumen, esto es

$$\int\int\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + div \ \rho \overrightarrow{\mathbf{v}} \right) = 0 \tag{9}$$

Sin ambargo, puesto que V es un volumen arbitrario y las funciones concernientes se suponen continuas, se tiene que en elemento integrando debe ser cero, es decir

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div \ \rho \overrightarrow{\mathbf{v}} = 0 \tag{10}$$

La ecuación (10), una ecuación en derivadas parciales, es equivalente al principio de la conservación de masa; y ella es más conveniente y accesible matemáticamente puesto que no envuelve a ningún volumen en particular.