Segunda prueba de Cálculo Vectorial, primer semestre 2023

Eliseo Martínez

22 de junio del 2022.

Resumen

Se entrega un esbozo de solución de la segunda prueba de cálculo vectorial.

Para los problemas que vienen se utilizará lo siguiente: Se considera la superficie de una esfera de radio R (observe la Figura 1) dada por

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \tag{1}$$

y sobre esa esfera se traza el plano $z = z_0$, con $0 < z_0 < R$, y se intersecta a la esfera, formando una curva en el espacio, digamos C_{z_0}, que viene a ser una circunferencia de un determinado radio que usted debe calcular. Llamemos a este radio r_{z_0}. Podemos encontrar una forma paramétrica $\overrightarrow{r}(t)$ para esta curva C_{z_0}.

1. Primer estándar: integral de un campo escalar sobre una curva

Sea el campo escalar $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, calcule

$$\int_{C_{z_0}} \phi(x, y, z)\ \|d\overrightarrow{r}\|dt$$

donde $\overrightarrow{r}(t)$ es una representación paramétrica de la curva C_{z_0} co radio R y $z = z_0$

Es evidente el error notacional, en estricto rigor la integral solicitada es

$$\int_{C_{z_0}} \phi(x, y, z)\ ds$$

donde s es la curva determinada por $\overrightarrow{r}(t)$

Desarrollo. La ecuación cartesiana de la curva C_{z_0} es

$$x^2 + y^2 = \left(\sqrt{R^2 - z_0^2}\right)^2 = r_0^2; \quad z = z_0 \tag{2}$$

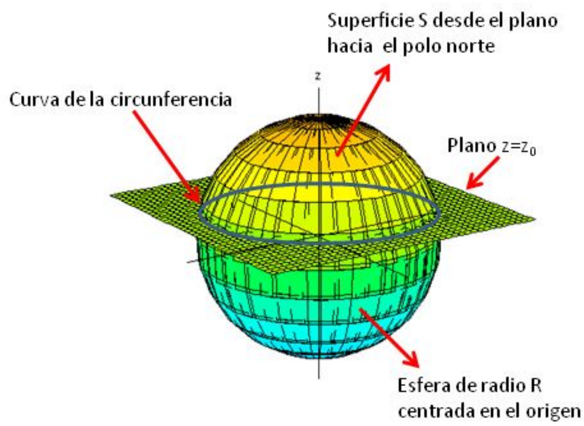

Figura 1: Esfera cortada por un plano paralelo al plano XY

y una representación paramétrica puede ser

$$\overrightarrow{r}(t) = [r_0 cos(t), r_0 sen(t), z_0] \tag{3}$$

De modo que

$$\frac{d\overrightarrow{r}(t)}{dt} = [-r_0 cos(t), r_0 sen(t), 0] \quad ; \quad 0 \le t \le 2\pi \tag{4}$$

y entonces

$$\frac{ds}{dt} = \| \frac{d\overrightarrow{r}(t)}{dt} \| = r_0 \tag{5}$$

tenemos entonces que

$$\int_{C_{z_0}} \phi(x,y,z)\ ds = \int_0^{2\pi} \phi(\overrightarrow{r}(t))\ r_0\ dt = r_0 \int_0^{2\pi} (r_0^2 + z_0^2) dt$$

finalmente

$$\int_{C_{z_0}} \phi(x,y,z)\ ds = 2\pi\ R^2 r_0 = 2\pi R^2 \sqrt{R^2 - z_0^2}$$

2. Segundo estándar: integral de un campo escalar sobre una superficie

Para el campo escalar $\psi(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ calcule la integral

$$\int_S \psi(x,y,z)\ dS$$

donde S es la superficie formada por la superficie de la esfera de radio R que está sobre el plano $z = z_0$ Sabemos que

$$\int_S \psi(x,y,z)dS = \int\int_{R_{xy}} \psi(x,y,z)\sqrt{1-\varphi_x^2-\varphi_y^2}\ dxdy$$

En nuestro caso

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi_x(x,y) = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\ ;\ \ \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi_y(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

y la región R_{xy} es la región encerrada en la circunferencia $x^2 + y^2 = r_0^2$, con $r_0 = \sqrt{R^2 - z_0^2}$.
Por otro lado la función $\psi(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ definida en la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ es $\varphi(x,y,z) = R$. Entonces

$$\int_S \psi(x,y,z)dS = \int\int_{R_{xy}} R\sqrt{1-\frac{x^2}{R^2-x^2-y^2}-\frac{y^2}{R^2-x^2-y^2}}$$

$$\int_S \psi(x,y,z)dS = \int\int_{Rxy} \sqrt{\frac{R^2-2(x^2+y^2)}{R^2-(x^2+y^2)}}\ dxdy$$

utilizando coordenadas polares queda la expresión

$$\int_S \psi(x,y,z)dS = 2\pi R\int_0^{r_0} r\frac{R^2-2r^2}{R^2-r^2}\ dr$$

3. Tercer estándar: integral de un campo vectorial sobre una curva cerrada

Sea el campo vectorial $\overrightarrow{F}(x,y,z) = \frac{(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|}$. Calcule

$$\oint_{C_{z_0}} \overrightarrow{F}(x,y,z)\ d\overrightarrow{r}$$

donde $\overrightarrow{r}(t)$ describe la curva cerrada C_{z_0} para R y $z = z_0$
Es claro que el campo vectorial $\overrightarrow{F}(x,y,z) = \frac{(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|}$ es irrotacional, esto es

$$\nabla \times \overrightarrow{F}(x,y,z = (0,0,0)$$

y en consecuencia tiene un potencial escalar, digamos $\varphi(x,y,z)$ de modo que la intergral de un irrotacional $\overrightarrow{F}$ sobra una curva cerrada es

$$\oint_{C_{z_0}} \overrightarrow{F}(x,y,z)\ d\overrightarrow{r} = 0$$

4. Cuarto estándar: integral de un campo vectorial sobre una superficie con frontera

Sea el campo vectorial $\overrightarrow{F}(x, y, z) = \frac{(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|}$. Calcule la siguiente intergral

$$\oint_S \overrightarrow{F}(x, y, z) \cdot \widehat{n}\ dS$$

donde S es la superficie formada por la superficie de la esfera de radio R que está sobre el plano $z = z_0$

Se tiene que

$$\oint_S \overrightarrow{F}(x, y, z) \cdot \widehat{n}\ dS = \int\int_{R_{xy}} \overrightarrow{F} \cdot (-\varphi_x, -\varphi_i, 1)\ dxdy$$

y puesto que

$$\overrightarrow{F}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(x, y, z) = \frac{1}{R}(x, y, z)$$

en la superficie S, y

$$((-\varphi_x, -\varphi_i, 1)) = (\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, 1)$$

entonces

$$\int\int_{R_{xy}} \overrightarrow{F} \cdot (-\varphi_x, -\varphi_i, 1)\ dx\ dy = R \int\int_{R_{xy}} \frac{1}{R^2 - x^2 - y^2} dx\ dy$$

y puesto que R_{xy} es el interior de la circunferencia $x^2 + y^2 = r_0^2$, con $r_0 = \sqrt{R^2 - z_0^2}$. De modo que utilizando coordenadas polares, la integral queda como

$$\oint_S \overrightarrow{F}(x, y, z) \cdot \widehat{n}\ dS = 2\pi R \int_0^{r_0} \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr = 2\pi R(R - z_0)$$

5. Quinto estándar: el terorema de Stokes

Verifique el Teorema de Stokes para la superficie S determinada por la superficie superior de la esfera cuya frontera es la curva C_{z_0} con $R = 5$ y $z_0 = 2$, esto es

$$\oint_{C_{z_0}} \overrightarrow{F}(x, y, z)\ d\overrightarrow{r} = \int_S rot\overrightarrow{F}(x, y, z)\ \cdot \widehat{n}\ dS$$

con $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (xy, y^2, zy)$

6. Sexto estándar: Integral de un campo vectorial sobre una superficie cerrada resuelto por el teorema de la divergencia

Suponga que se tiene el campo vectorial $\overrightarrow{G}(x,y,z) = \frac{k(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|^2}$, calcule el flujo de este campo actuando sobre la superficie, S_R, de la esfera de radio R. Utilice el Teorema de la Divergencia, esto es

$$\oint_{S_R} \overrightarrow{G}(x,y,z) \cdot \widehat{n}\ dS_R = \int\int\int_V div\overrightarrow{G}(x,y,z)\ dV$$

donde S_R es la superficie de la esfera de radio R, y V es la región (o volumen) $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$
Es casi inmediato, puesto que

$$Div\overrightarrow{G}(x,y,z) = \frac{k}{x^2+y^2+z^2}$$

Utilizando coordenadas esféricas, la intergral queda como

$$\int\int\int_V div\overrightarrow{G}(x,y,z)\ dV = k\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\pi}\int_{r=0}^{R} \frac{sen(\phi)}{r} d\theta\ d\phi\ dr$$