# Gradiente de un campo escalar

Eliseo Martínez

14 de abril de 2020

**Resumen**

Se estudian los campos escalares de manera muy sencilla con dominio en el espacio de tres dimensiones. Se define el gradiente de un campo escalar mediante sus derivadas parciales, y se estudian tres ejemplos sencillos pero fundamentales en el desarrollo de la didáctica de la enseñanza de la física de Newton

## 1. Preliminares

Debe recordar la ecuación de un plano

$$a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = k$$

donde el vector $(a, b, c)$ es perpendicular al plano. Y debe recordar que la ecuación de una esfera de radio $r$ es

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

Y esto significa, entre muchas otras cosas, de que sea capaz de encontrar puntos que pertenezcan a esta superficies.

## 2. Definición de un campo escalar

Toda función definida como

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{F} : \Omega \subseteq \mathbf{R}^3 & \rightarrow & \mathbf{R} \\ (x, y, z) & \rightarrow & \mathbf{F}(x, y, z) \end{array} \tag{1}$$

se dice que es un *campo escalar*. La idea como modelo físico es que para cada punto de $\Omega$, como parte o todo del espacio tridimensional $\mathbf{R}^3$ se le mide una propiedad, una sola propiedad, representada por un valor númerico. A modo de ejemplo puede ser (dos de los más utilizadas como ejemplos paradigmáticos): la temperatura existente en el lugar $(x, y, z)$, la presión atmosférica en el lugar $(x, y, z)$. Ejemplos más sencillos y de mayor utilidad didáctica son

$$F(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$H(x,y,z) = a\cdot x + b\cdot y + c\cdot z$$
$$G(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Las derivadas parciales sobre un campo siguen los siguientes pasos clásicos emulando, *mutatis mutandis*, lo que se aplica en funciones reales.

- $F(x,y,z) \in \mathbf{R}$
- $F(x+\Delta x,y,z)$
- $F(x+\Delta x,y,z) - F(x,y,z)$
- $\frac{F(x+\Delta x,y,z)-F(x,y,z)}{\Delta x}$
- $\lim_{\Delta x\to 0} \frac{F(x+\Delta x,y,z)-F(x,y,z)}{\Delta x} = \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}$
- $F(x,y+\Delta y,z)$
- $F(x,y+\Delta y,z) - F(x,y,z)$
- $\frac{F(x,y+\Delta y,z)-F(x,y,z)}{\Delta y}$
- $\lim_{\Delta y\to 0} \frac{F(x,y+\Delta y,z)-F(x,y,z)}{\Delta y} = \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}$
- $F(x,y,z+\Delta z)$
- $F(x,y,z+\Delta z) - F(x,y,z)$
- $\frac{F(x,y,z+\Delta z)-F(x,y,z)}{\Delta z}$
- $\lim_{\Delta z\to 0} \frac{F(x,y,z+\Delta z)-F(x,y,z)}{\Delta z} = \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}$

# 3. Gradiente de un campo escalar

Para el campo escalar $F(x,y,z)$, una vez definida sus derivadas parciales se define el gradiente de $F$ en el punto $(x,y,z)$, como el vector

$$\nabla F(x,y,z) = \left(\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}, \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}, \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}\right) \tag{2}$$

Todo campo escalar, entonces, define un vector gradiante en cada punto. Y la interpretación geométrica (y física) es la siguiente: para cada punto $(x,y,z)$, el valor $F(x,y,z)$ define un punto[1] $\nabla F(x,y,z)$ resultando un vector

$$\overrightarrow{AB}$$

el vector que une $A$ con $B$, donde $A = (x,y,z)$ y $B = \nabla F(x,y,z)$

[1] Aprovechándonos de la dualidad punto-vector

## 3.1. El campo escalar $H(x, y, z) = a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z$

Para explicar lo anterior acudamos al campo $H(x, y, z) = a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z$, donde para todo $(x, y, z)$ su gradiente es uno solo, esto es

$$\nabla H(x, y, z) = (a, b, c)$$

De modo que para en todo el espacio habrá una lluvia de vectores (digamos un campo de vectores) posicionados en cada punto $(x, y, z)$ y que son paralelos (o el mismo) al vector $(a, b, c)$.
Observemos que nos dice este gradiente. Elijamos un subconjunto del espacio $\mathbf{R}^3$, por ejemplo la superficie $H(x, y, z) = k$ que viene a ser el plano:

$$a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = k$$

y puesto que para esta superficie los valores del campo escalar es siempre el mismo, esto nos dice que la mejor dirección para que haya un cambio del valor de $H$ es tomar la dirección del vector normal al plano[2], esto es en la dirección $(a, b, c)$. Esta propiedad la confirmaremos con la derivada direccional de un campo escalar.

## 3.2. El campo escalar $F(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Este campo escalar tiene una buena simetría en relación al cálculo de sus derivadas parciales, en efecto

$$\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

y por analogía

$$\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

De modo que su gradiente es

$$\nabla F(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(x, y, z) \tag{3}$$

Y cada vector gradiente tiene la dirección del vector posición $(x, y, z)$. Para imaginarnos como serán estos vectores formemos una superficie de nivel, esto es $F(x, y, z) = r$, de modo que tenemos

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

una esfera de radio $r$, entonces el gradiente para todo punto de la superficie de esta esfera vale

$$\nabla F(x, y, z) = \frac{1}{r}(x, y, z)$$

y nos indica vectores en la dirección radial al origen.

[2]Y lo fundamental, que veremos más adelante que el gradiente siempre es perpendicular a las superficies de nivel

## 3.3. El campo escalar $G(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

El campo escalar $G(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ también posee simetría en el cálculo de sus derivadas parciales. Tenemos que

$$\frac{\partial G(x,y,z)}{\partial x} = \frac{-x}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}$$

de modo que utilizando la simetría obtenemos rapidamente el gradiente que es

$$\nabla G(x,y,z) = \frac{-1}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}(x,y,z)$$

Si formamos las superficie de nivel para este campo escalar, haciendo $G(x,y,x) = r$, obtenemos la esfera centrada en el origen de radio $\frac{1}{r}$

$$x^2+y^2+z^2 = \frac{1}{r^2}$$

y el gradiente para esos puntos de la superficie de la esfera es

$$\nabla G(x,y,z) = \frac{-1}{r^3}(x,y,z)$$

y esta vez son vectores en la dirección radial con sontido opuesto al origen.

# Referencias


[1] Apuntes del curso