Derivada direccional de un campo escalar

Eliseo Martínez

19 de abril de 2021

Resumen

Sobre un campo escalar vamos a definir y entregar el significado de la derivada direccional de un campo escalar, y su relación con el gradiente del mismo campo escalar.

1. El significado de la derivada direccional

Recordemos que un campo escalar $F(x, y, z)$ definido en una región del espacio $\mathbf{R}^3$ es una función de tres variables que asume un valor real. Ejemplo

$$F(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$G(x, y, z) = x \cdot y \cdot z$$

$$H(x, y, z) = 2x + 2y - 4z$$

Condideremos un campo cualquiera F definido en $\mathbf{R}^3$, y lo evaluamos en el punto (x_0, y_0, z_0), en consecuencia obtenemos el valor real de $F(x_0, y_0, z_0)$. Supongamos ahora que evaluamos este campo escalar en un punto muy cercano al punto anterior, digamos $(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l)$ y de esta manera podemos evaluar si hay una diferencia del valor del campo entre estos dos puntos, para eso calculamos el valor resultante de

$$F(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l) - F(x_0, y_0, z_0) \tag{1}$$

y este valor nos indicará que tan grande, o que tan pequeño o si es nulo este cambio. Observemos que esto es una generalización de lo que uno acostumbra a hacer en las funciones reales. Esto es si $f(x)$ es una función real entonces la medición de la variación de esta función en un punto cercano a x_0, digamos $x_0 + h$ se realiza mediante

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \tag{2}$$

Observemos que esta expresión se puede poner de manera análoga a la expresión (1), esto es

$$F((x_0, y_0, z_0) + (h, k, l)) - F(x_0, y_0, z_0) \tag{3}$$

Supongamos ahora que queremos medir el valor del campo escalar en el punto (x_0, y_0, z_0) y queremos compararlo con otro punto cercano en una cierta dirección digamos $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$, y de tal forma que este vector es unitario, esto es $\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\| = 1$ Entonces queremos medir la siguiente variación

$$F((x_0, y_0, z_0) + \lambda(u_1, u_2, u_3)) - F(x_0, y_0, z_0) \tag{4}$$

Para el caso real, como lo mide la expresión (2), hacemos

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{5}$$

De manera análoga formamos el cociente

$$\frac{F((x_0, y_0, z_0) + \lambda(u_1, u_2, u_3)) - F(x_0, y_0, z_0)}{\lambda} \tag{6}$$

Y similar al caso real en la definición de la derivada, se define la derivada direccional de $F(x, y, z)$ en el punto (x_0, y_0, z_0) en la dirección unitaria $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$ como

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{F((x_0, y_0, z_0) + \lambda(u_1, u_2, u_3)) - F(x_0, y_0, z_0)}{\lambda} \tag{7}$$

Y si este límite existe lo denotamos por $D_{\overrightarrow{\mathbf{u}}} F(x_0, y_0, z_0)$. De modo que esta derivada direccional está midiendo un rapidez de cambio desde el punto (x_0, y_0, z_0) en la dirección $\overrightarrow{\mathbf{u}}$

2. La derivada direccional y la derivada parcial

Supongamos que la dirección en la expresión (7) es ahora $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (1, 0, 0) = \overrightarrow{\mathbf{e_1}}$ Entonces se puede verificar que

$$D_{\overrightarrow{\mathbf{e_1}}} F(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} \tag{8}$$

De la misma forma para $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (0, 1, 0) = \overrightarrow{\mathbf{e_2}}$

$$D_{\overrightarrow{\mathbf{e_2}}} F(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} \tag{9}$$

y finalmente para $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (0, 0, 1) = \overrightarrow{\mathbf{e_3}}$

$$D_{\overrightarrow{\mathbf{e_3}}} F(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} \tag{10}$$

2.1. El gradiente y la derivada direccional

Sea $F(x, y, z)$ un campo escalar, sea $\mathbf{a} = (x_0, y_0, z_0)$ un punto en el espacio, sea $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$ un vector unitario, entonces la derivada direccional $D_{\overrightarrow{\mathbf{u}}}F(x_0, y_0, z_0)$ se puede calcular como

$$D_{\overrightarrow{\mathbf{u}}}F(x_0, y_0, z_0) = \nabla F(x_0, y_0, z_0) \bullet \overrightarrow{\mathbf{u}} \tag{11}$$

Es decir

$$D_{\overrightarrow{\mathbf{u}}}F(\mathbf{a}) = \frac{\partial F(\mathbf{a})}{\partial x}u_1 + \frac{\partial F(\mathbf{a})}{\partial y}u_1 + \frac{\partial F(\mathbf{a})}{\partial z}u_1$$

Quiere decir con esto que la derivada direccional, en la dirección $\overrightarrow{\mathbf{u}}$, es sencillo de calcular, y para eso basta hacer el producto punto entre el gradiente y el vector dirección. Lo interesante es que la ecuación (11) nos permite deducir que el máximo valor que puede tomar la derivada direccional en un punto es precisamente la dirección que indica el gradiente en ese punto. En efecto, si θ es el ángulo comprendido entre $\nabla F(\overrightarrow{\mathbf{a}})$ y $\overrightarrow{\mathbf{u}}$, entonces

$$D_{\overrightarrow{\mathbf{u}}}F(\mathbf{a}) = \|\nabla F(\mathbf{a})\| cos(\theta) \tag{12}$$

Y esta derivada direccional toma su máximo valor cuando $\theta = 0$, es decir tanto $D_{\overrightarrow{\mathbf{u}}}F(\mathbf{a})$ como $\nabla F(\mathbf{a})$ tienen la misma dirección.