Integral de un campo escalar sobre una curva

Eliseo Martínez

28 de abril de 2021

Resumen

Se entrega el significado de la integral de línea de un campo escalar.

1. Las componentes de $\int_C ds$ en el plano

Debemos agradecer a Pitgoras que podamos calcular la longitud de una curva mediante

$$\int_C ds$$

Donde C representa la curva **en el plano** (luego trabajaremos en tres dimensiones), y vamos a resolver ese misterio.
Sea $\overrightarrow{r}(t)$ el vector que nos entrega la posicin de todo punto de la curva, esto es

$$\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t))$$

donde $(x(t), y(t))$ es un punto que pertenece a la curva C para un determinado valor de t. A la curva C la seccionamos en pedacitos muy pequeñitos de una misma longitud ds Si observamos una pedacito de ds podemos notar que el segmento de sus proyecciones, dx y dy sobre los ejes respectivos, se le puede aplicar el teorema de Pitágoras, esto es

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

y puesto que

$$dx(t) = x'(t)\ dt$$

$$dy(t) = y'(t)\ dt$$

se concluye que

$$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

Por otro lado, su suponemos que la curva C empieza en el punto y termina en el punto $\overrightarrow{r}(t_2) = (x(t_2), y(t_2))$, y puesto que la suma de los incrementos ds nos entrega la longitud de la curva desde $\overrightarrow{r}(t_1)$ hasta $\overrightarrow{r}(t_2)$, tenemos entonces que

$$\int_C ds = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

2. Una aplicación fundamental: el perímetro de una circunferencia

Tempranamente nos dijeron, sin mucha explicación que el perímetro de un circunferencia es $2\pi r$, siendo r el radio de la circunferencia. Pues bien, llegó la hora de resolver ese misterio. Consideremos la circunferencia de radio r con centro en el origen $(0,0)$, esto es

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Esta curva (cerrada) tiene, entre otras, la siguiente representación paramétrica

$$x(\theta) = rcos(\theta)$$

$$y(\theta) = rsen(\theta)$$

de modo que $\overrightarrow{r}(\theta) = (rcos(\theta), rsen(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$, y además

$$x'(\theta) = -rsen(\theta)$$

$$y'(\theta) = rcos(\theta)$$

Notemos que $r(0) = (0,0)$ y $r(2\pi) = (0,0)$ (la curva es cerrada, esto es el inicio coincide con el final). Entonces la longitud de la circunferencia (el perímetro) es

$$\int_C ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-rsen(\theta))^2 + (rcos(\theta))^2} d\theta = \int_0^{2\pi} r \; d\theta = 2\pi r$$

3. Las componentes de $\int_C ds$ en el espacio

Suongamos que una curva en el espacio tridimensional se puede describir por

$$\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

entonces una diferencial de la longitud de curva, digamos ds, por la relación pitagórica se obtiene que

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

y puesto que

$$dx(t) = x'(t) \; dt$$

$$dy(t) = y'(t) \; dt$$

$$dz(t) = z'(t) \; dt$$

de modo que la longitud de una curva, C, en el espacio desde $\overrightarrow{r}(t_1)$ hasta $\overrightarrow{r}(t_2)$ está dada por

$$\int_C ds = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

4. significado de la integral de línea sobre un campo escalar

Sea la función vectorial $\overrightarrow{r(t)}$ que describe en forma paremétrica la curva C, y sea un campo escalar $F(x, y, z)$. Entonces el capo escalar definida sobre los puntos de esta curva C se evalúa como $F(\overrightarrow{r(t)})$. Le vamos a dar un sentido la la integral

$$\int_C F \cdot ds \tag{1}$$

Antes de explicar el concepto contaremos el final. Esta integral en (1) se calcula como

$$\int_C F \cdot ds = \int_{t_0}^{t_f} F(\overrightarrow{r(t)})\ |\overrightarrow{r'(t)}|\ dt \tag{2}$$

Referencias

[1] Apuntes del curso