ÁLGEBRA II
CM 214

Módulo I

Recopilación: Maura Álvarez Donoso y Dalia Escalier Soto.

Índice general

1. UNIDAD I: GEOMETRÍA EN $\mathbb{R}^3$ Y GEOMETRÍA VECTORIAL 3
1.1. Vector posición de un punto de $\mathbb{R}^2$ y de $\mathbb{R}^3$. Notación vectorial. 3
1.1.1. Suma de Vectores. Producto de un vector por un escalar. 5
1.2. Norma y dirección de un vector. Vectores unitarios. Cosenos directores de un vector 6
1.2.1. Gráfica de la suma de vectores y producto escalar por un vector en $\mathbb{R}^3$ . . 7
1.3. Representación de un vector como combinación lineal de vectores unitarios 9
1.3.1. Dirección de un vector no nulo en $\mathbb{R}^2$ 10
1.3.2. Dirección de un vector no nulo en $\mathbb{R}^3$ 11
1.4. Producto entre vectores: interno, cruz, triple. Propiedades 12
1.4.1. Producto cruz o vectorial entre vectores. Propiedades 15
1.4.2. Productos Triples 19
1.5. Ecuación vectorial de una recta. Números directores 22
1.5.1. Posiciones relativas de rectas en el espacio 24
1.6. Ecuación vectorial de un plano 27
1.6.1. Distancia de un punto a un plano 28
1.6.2. Intersección de dos planos 28
1.6.3. Ángulo entre una recta y un plano 29
1.7. Superficies cilíndricas y cuádricas 30
1.7.1. Superficies cilíndricas 30
1.7.2. Superficies Cuádricas 32
1.7.3. Sólidos 38

2. UNIDAD II: POLINOMIOS 42
2.1. Definición, igualdad y grado de un polinomio 42
2.1.1. Introducción 42
2.1.2. Definición de polinomio 43
2.1.3. Igualdad de polinomios 43
2.1.4. Grado de un polinomio 44
2.2. Operatoria con polinomios 45
2.2.1. Suma de polinomios 45
2.2.2. Producto de polinomios 45
2.3. Algoritmo de la división. División sintética. Teorema del resto 47

2.3.1. Algoritmo de la división 47
2.3.2. División sintética 48
2.3.3. Evaluación de un polinomio. Teorema del resto 49
2.4. Raíces de un polinomio. Factorización de un polinomio 50
2.4.1. Raíz de un polinomio 50
2.4.2. Factorización de un polinomio. Teorema fundamental del álgebra 50
2.4.3. Algunos criterios para raíces 52

Capítulo 1

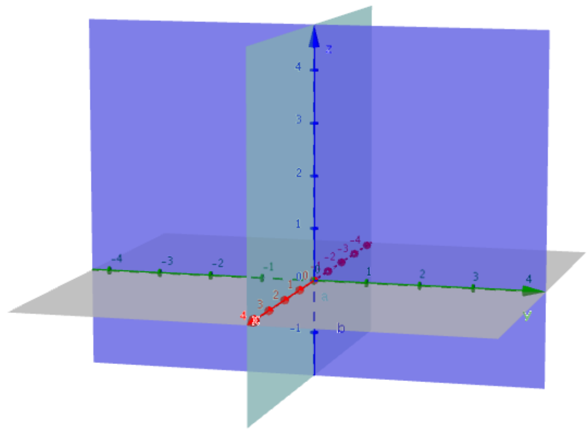
UNIDAD I: GEOMETRÍA EN $\mathbb{R}^3$ Y GEOMETRÍA VECTORIAL

1.1. Vector posición de un punto de $\mathbb{R}^2$ y de $\mathbb{R}^3$. Notación vectorial.

Recordemos que un modelo geométrico del conjunto $\mathbb{R}$ lo constituye los puntos de una recta, en la cual se ha elegido un punto cualquiera al que se le hace corresponder el real 0 y mediante una medida unitaria arbitraria se ubican, hacia la derecha del 0, los puntos de $\mathbb{R}^+$ y hacia la izquierda los puntos de $\mathbb{R}^-$.

La representación geométrica de $\mathbb{R}^2$, a partir de un sistema coordenado de referencia, está constituido por un plano determinado por dos rectas ortogonales cuyo punto de intersección representa al par $(0,0)$ llamado origen del sistema, a partir de este punto se orientan las rectas determinando cuatro cuadrantes. A cada punto P del plano cartesiano le corresponde una única coordenada (x,y) de $\mathbb{R}^2$ y viceversa; a partir de esta representación se desarrolla lo que denominamos Geometría Analítica Plana.

En forma similar, podemos representar los puntos de $\mathbb{R}^3$ en el espacio tridimensional usando tres ejes coordenados de referencia llamados eje x, eje y, eje z y desarrollar la Geometría Analítica del Espacio. Estos tres ejes dividen al espacio tridimensional en 8 octantes separados por tres planos perpendiculares entre sí.

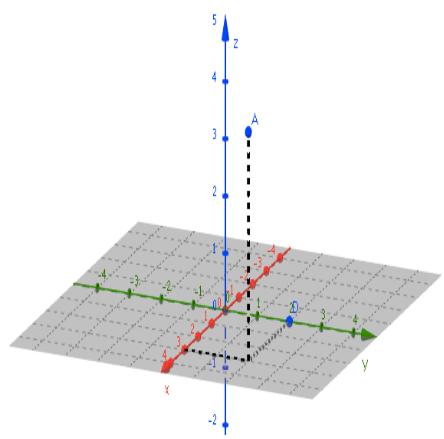


Un elemento (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ se asocia con cada punto $P(x, y, z)$ del espacio geométrico tridimensional, se dice que un sistema de coordenadas rectangulares en el espacio establece una correspondencia biunívoca entre cada punto del espacio y una terna ordenada de números reales.

Ejemplo 1.1. *Graficar el punto $A(3, 2, 4)$*

Solución:

Para el punto A, se grafica en primer lugar el par $(3, 2)$ en el plano XY, como es usual. Luego se traza una recta paralela al eje z que pasa por $(3, 2)$ y sobre esta recta se mide 4 unidades en sentido positivo. El punto obtenido representa $A(3, 2, 4)$.



Otro enfoque interesante para tratar $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, y en general $\mathbb{R}^n$, lo constituyen los espacios vectoriales, para lo cual necesitamos proveer a estos conjuntos de operaciones algebraicas las cuales permiten estructurarlos como Espacios Vectoriales. En este caso a los elementos de $\mathbb{R}^n$ los denominamos vectores.

El concepto de vector está asociado frecuentemente a las aplicaciones matemáticas en la física y en la ingeniería que están relacionadas con cantidades que poseen magnitud, dirección y sentido, ejemplos de estas son: fuerza, velocidad, aceleración y desplazamiento. Su representación gráfica es la característica flecha con que se asocia este concepto. Un segmento de recta dirigido, cuya longitud es la magnitud del vector, la punta de la flecha indica el sentido y su inclinación, la dirección.

Es posible establecer matemáticamente el concepto de vector, es decir, considerar que un vector es un elemento de un conjunto que satisface ciertas propiedades. Comenzaremos definiendo operaciones en $\mathbb{R}^n$ de modo que este conjunto tenga una estructura de Espacio Vectorial .

Definición 1.1. *El conjunto $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, llamado espacio n-**dimensional**, es:*

$$\mathbb{R}^n = \{\vec{u} = (x_1, x_2, ..., x_n)/x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, ..., n\}$$

Si $n = 2$ entonces $\mathbb{R}^2 = \{\vec{u} = (x, y)/x, y \in \mathbb{R}\}$, vector en el plano bidimensional.
Si $n = 3$ entonces $\mathbb{R}^3 = \{\vec{u} = (x, y, z)/x, y, z \in \mathbb{R}\}$, vector en el espacio tridimensional.

1.1.1. Suma de Vectores. Producto de un vector por un escalar.

En $\mathbb{R}^n$ se define las siguientes operaciones:

Si $\vec{u} = (x_1, x_2, ..., x_n)$; $\vec{v} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ son elementos de $\mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene:

a) Suma: $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$.

b) Producto por un escalar: $\alpha\vec{u} = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$.

c) Igualdad: $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow x_i = y_i$, $\forall i = 1, 2, ..., n$.

Para estas operaciones se verifican las siguientes propiedades:

Propiedades para la suma

Si $\vec{u} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $\vec{v} = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $\vec{w} = (z_1, z_2, ..., z_n)$ son elementos de $\mathbb{R}^n$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se tiene:

1) Asociatividad: $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$

2) Elemento Neutro: $\forall\vec{u} \in \mathbb{R}^n$, $\exists\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ (Aquí $\vec{0} = (0, 0, ..., 0)$).

3) Elemento inverso: $\forall\vec{u} \in \mathbb{R}^n$, $\exists(-\vec{u}) \in \mathbb{R}^n$ tal que $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$. $(-\vec{u} = (-x_1, ..., -x_n))$.

4) Conmutatividad: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

Propiedades para el producto por escalar

5) $\alpha(\vec{u}+\vec{v}) = \alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$.

6) $(\alpha+\beta)\vec{u} = \alpha\vec{u}+\beta\vec{u}$.

7) $(\alpha\beta)\vec{u} = \alpha(\beta\vec{u})$.

8) $1\vec{u} = \vec{u}$.

La verificación de estas propiedades permiten concluir que $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Así, matemáticamente **un vector es un elemento de un espacio vectorial**. Los elementos de $\mathbb{R}$ se denominan **escalares**.

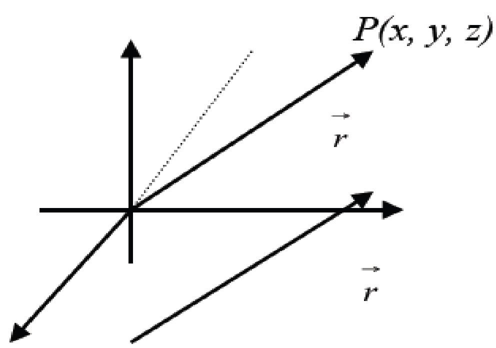
Observación 1.1.

a) *Se define la resta de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en $\mathbb{R}^n$ por: $\vec{u}-\vec{v} = \vec{u}+(-\vec{v})$.*

b) *En lo sucesivo se trabajará en los espacios vectoriales $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Es decir se trabajará con vectores que serán pares ordenados o tríos ordenados de números reales.*

1.2. Norma y dirección de un vector. Vectores unitarios. Cosenos directores de un vector

Para graficar un vector en $\mathbb{R}^3$, se preserva la interpretación física de un vector como una flecha. Se asocia al trío ordenado (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$ una flecha que une el origen del sistema de coordenadas con el punto $P(x, y, z)$, este vector $\vec{OP}$ designado por $\vec{r}$ se llama vector posición de P, donde 0 es el punto inicial y P el punto final de $\vec{r}$. Cualquier segmento de recta dirigido, el cual es igual a $\vec{OP}$ está también representado por el vector $\vec{r}$.



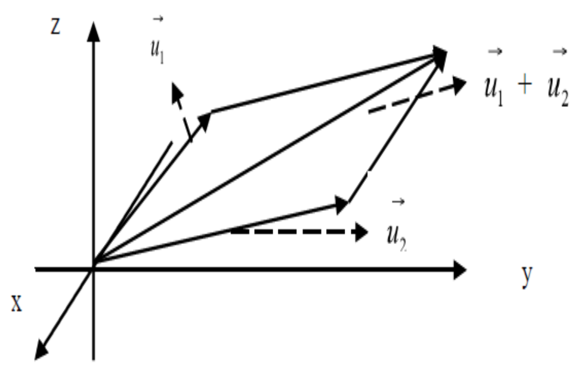
Observación 1.2.

a) *Se acostumbra definir un vector como el conjunto de todos los segmentos orientados que tiene una magnitud, una dirección y un sentido.*

b) *Recordemos que también lo aplicamos en* $\mathbb{R}^2$.

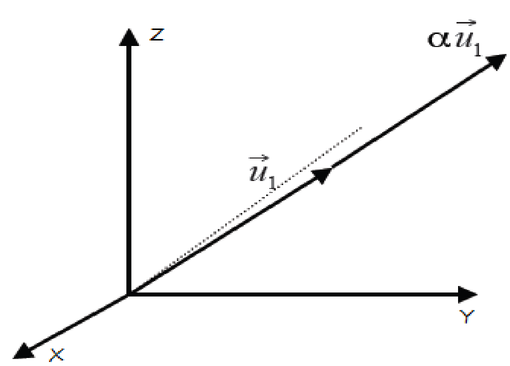
1.2.1. Gráfica de la suma de vectores y producto escalar por un vector en $\mathbb{R}^3$

Sean $\vec{u}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{u}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ en $\mathbb{R}^3$, entonces $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ tiene como representación gráfica,



Se observa que $\vec{u_1} + \vec{u_2}$ está representado por una flecha que va desde el origen al vértice opuesto del paralelogramo cuyos lados son las flechas que representan a $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$. Esta suma de vectores se conoce como ley del paralelogramo para la suma.

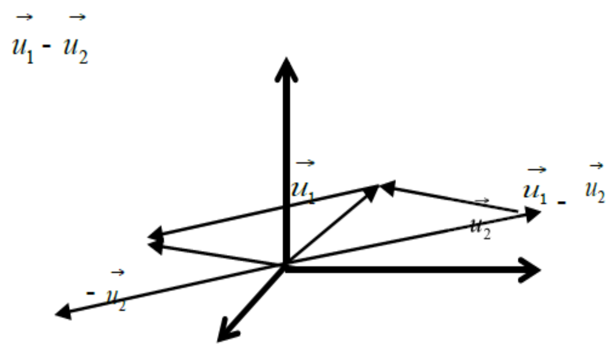
Si $\vec{u}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ el vector $\alpha\vec{u}_1 = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$ tiene como representación gráfica:



Observación 1.3.

a) *Si $\alpha > 0$, el vector $\alpha\vec{u_1}$ es α veces el vector $\vec{u}_1$ en el mismo sentido de $\vec{u_1}$ y si $\alpha < 0$ tendrá dirección opuesta a $\vec{u}_1$ y $|\alpha|$ veces este vector.*

b) *Para efectuar la resta entre vectores $\vec{u}_1 - \vec{u_2}$, al vector $\vec{u}_1$ se le suma el vector opuesto a $\vec{u}_2$.*



Definición 1.2. *Dos vectores $\vec{r}$ y $\vec{p}$ son paralelos si uno es múltiplo escalar del otro, esto es $\vec{r} = t\vec{p}$, $t \in \mathbb{R}$.*

Definición 1.3. *a)* *Se denomina **Norma** o **Magnitud** de un vector $\vec{r} = (x, y, z)$ en $\mathbb{R}^3$ al número dado por la expresión:*

$$\| \vec{r} \| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

b) *Si el vector $\vec{r} = (x, y)$ en $\mathbb{R}^2$, $\| \vec{r} \| = \sqrt{x^2 + y^2}$.*

En general si $\vec{r} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ en $\mathbb{R}^n$ se tiene: $\| \vec{r} \| = (\Sigma_{i=1}^{n} x_i)^{\frac{1}{2}}$.

Propiedades de la Norma

Sean $\vec{r}, \vec{u} \in \mathbb{R}^n$, entonces

1) $\| \vec{r} \| \geq 0$; $\| \vec{r} \| = 0$ si, y sólo si $\vec{r} = \vec{0}$.

2) $\| \vec{r} + \vec{u} \| \leq \| \vec{r} \| + \| \vec{u} \|$

3) $\| \alpha\vec{r} \| = |\alpha| \ \| \vec{r} \|$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 1.2. *Hallar la norma del vector $\vec{r} = (4, 2, -4)$*

Solución:
Por definición de norma de un vector

$$\| \vec{r} \| = \sqrt{4^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{16 + 4 + 16} = \sqrt{36} = 6$$

Definición 1.4. *Un vector* $\vec{r} \in \mathbb{R}^n$*, es unitario si* $\| \vec{r} \| = 1$*, se denota por* $\hat{r}$*.*

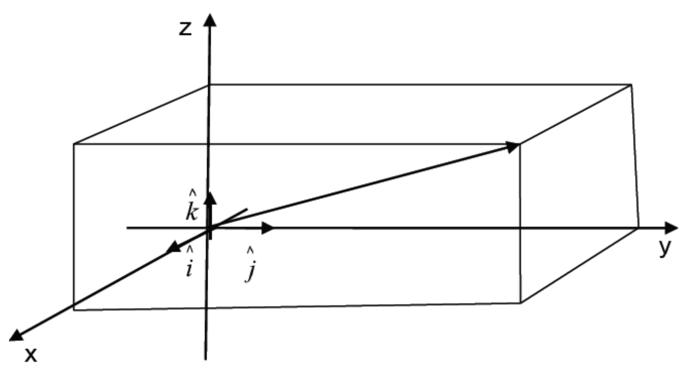
Observación 1.4. *Si* $\vec{r} \in \mathbb{R}^n$ *y* $\vec{r} \neq \vec{0}$ *entonces:* $\hat{r} = \dfrac{\vec{r}}{\| \vec{r} \|}$*, es un vector unitario en la dirección y sentido del vector* $\vec{r}$*.*

Ejemplo 1.3. *Si* $\vec{r} = (4, -3, 5)$ *y* $\vec{u} = (1, -5, 2)$ *obtener un vector unitario en la dirección de* $\vec{r} - 2\vec{u}$*.*

Solución:
$\vec{r} - 2\vec{u} = (4, -3, 5) - 2(1, -5, 2) = (2, 7, 1)$,
$r \hat{-} 2u = \dfrac{\vec{r} - 2\vec{u}}{\| \vec{r} - 2\vec{u} \|} = \dfrac{(2, 7, 1)}{\sqrt{4 + 49 + 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{54}}(2, 7, 1) = [\frac{1}{9}\sqrt{6}, \frac{7}{18}\sqrt{6}, \frac{1}{18}\sqrt{6}]$.

1.3. Representación de un vector como combinación lineal de vectores unitarios

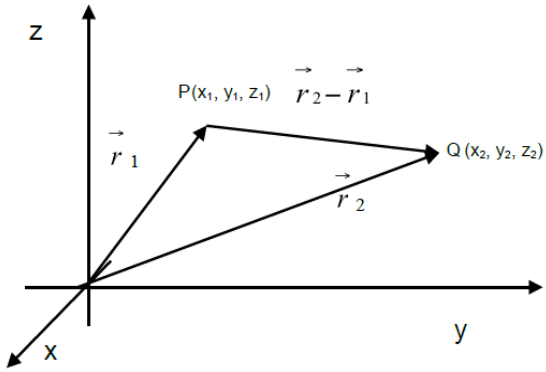
Todo vector $\vec{r}$ en $\mathbb{R}^3$ puede escribirse como $\vec{r} = (x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$. Los vectores $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ se denotan por $\hat{i} = (1, 0, 0)$, $\hat{j} = (0, 1, 0)$, $\hat{k} = (0, 0, 1)$ y son vectores unitarios. Así, $\vec{r}$ puede escribirse como: $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, los escalares x, y, z se denominan componentes del vector $\hat{r}$.



Los vectores $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ forman lo que se denomina en álgebra lineal una base de $\mathbb{R}^3$, puesto que todo vector $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ puede escribirse de manera única como una suma de estos vectores multiplicados cada uno por las respectivas coordenadas de $\overrightarrow{r}$.

Definición 1.5. *Si* $P(x_1, y_1, z_1)$ *y* $Q(x_2, y_2, z_2)$ *pertenecen a* $\mathbb{R}^3$ *con vectores posición* $\vec{r}_1 = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$ *y* $\vec{r}_2 = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$*, respectivamente entonces*

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}.$$



Definición 1.6. *La distancia entre dos puntos $P(x_1, y_1, z_1)$ y $Q(x_2, y_2, z_2)$ está dada por :*

$$\parallel \vec{PQ} \parallel = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

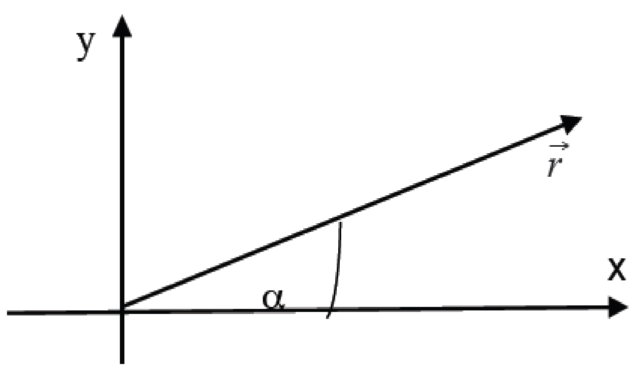
Ejemplo 1.4. *Dado los puntos $P(-2, 3, -1)$ y $Q(3, 4, -2)$ determinar la distancia entre ellos.*

Solución

Vector posición de $P : \vec{r}_1 = -2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$, vector posición de $Q : \vec{r}_2 = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$. Luego $\vec{PQ} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = 5\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, así: $\parallel \vec{PQ} \parallel = \sqrt{25 + 1 + 1} = \sqrt{27}$.

1.3.1. Dirección de un vector no nulo en $\mathbb{R}^2$

Definición 1.7. *La dirección de un vector $\vec{r}$ no nulo en $\mathbb{R}^2$ es la medida del ángulo α, que forma el semieje positivo X con el vector posición asociado a $\vec{r}$. El ángulo α está medido en radianes tal que $0 \leq \alpha \leq \pi$.*



Si $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$, se cumple además que:

$$\sin\alpha = \frac{y}{\parallel \vec{r} \parallel}, \cos\alpha = \frac{x}{\parallel \vec{r} \parallel}, \tan\alpha = \frac{y}{x} \text{ y } \vec{r} = \parallel \vec{r} \parallel \cos\alpha\hat{i} + \parallel \vec{r} \parallel \sin\alpha\hat{j}$$

Ejemplo 1.5. *Hallar la magnitud o norma y dirección del vector* $\vec{r} = (-3, 4)$.

Solución
La magnitud es:

$$\| \vec{r} \| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

y la dirección es

$$\alpha = \tan^{-1}(-\frac{4}{3}) = 126^o52'$$

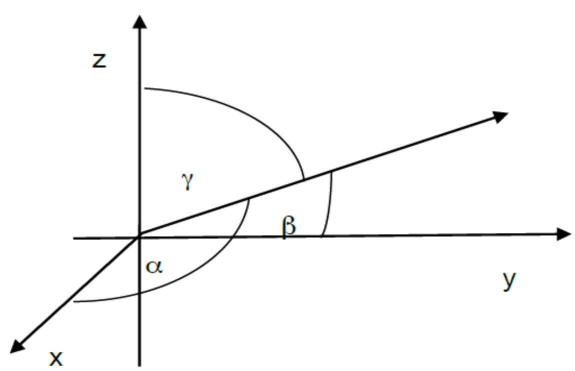
además podemos decir que

$$\vec{r} = 5(\cos 126^o52', \sin 126^o52') = 5\cos 126^o52'\hat{\imath} + 5\sin 126^o52'\hat{\jmath}.$$

1.3.2. Dirección de un vector no nulo en $\mathbb{R}^3$

La dirección de un vector no nulo en $\mathbb{R}^3$ está dada por tres ángulos llamados ángulos directores del vector.

Definición 1.8. *Los ángulos directores de un vector* $\vec{r}$ *no nulo en* $\mathbb{R}^3$ *son los tres ángulos* α, β, γ *que forman respectivamente los ejes positivos* X, Y, Z *con el vector posición asociado a* $\vec{r}$. *Los ángulos* α, β, γ *están medidos en radianes tales que* $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \pi$.



Definición 1.9. *Los cosenos de los ángulos directores* α, β, γ *del vector no nulo* $\vec{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, *se denominan cosenos directores del vector* $\vec{r}$.

Teorema 1.1. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, *donde* $\cos\alpha, \cos\beta$ *y* $\cos\gamma$ *son los cosenos directores del vector no nulo* $\vec{r}$ *en* $\mathbb{R}^3$.

Observación 1.5.

a) *Cualquier vector* $\vec{r}$ *no nulo puede expresarse en términos de su norma y cosenos directores.*
$\vec{r} = \| \vec{r} \| \cos\alpha\hat{\imath} + \| \vec{r} \| \cos\beta\hat{\jmath} + \| \vec{r} \| \cos\gamma\hat{k}$

b) *Si el vector es unitario, se tiene:* $\vec{r} = \cos\alpha\hat{i} + \cos\beta\hat{j} + \cos\gamma\hat{k}$, *es decir los componentes de un vector unitario son sus cosenos directores*

Ejemplo 1.6. *Sean los puntos* $P(-2,-3,-4)$ *y* $Q(1,3,-1)$, *determinar los cosenos directores del vector* $\vec{PQ}$.

Solución
$\vec{PQ} = 3\hat{i} + 6\hat{j} + 3\hat{k}$

$$\hat{\vec{PQ}} = \frac{3\hat{i} + 6\hat{j} + 3\hat{k}}{\sqrt{54}} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{6}} + \frac{2\hat{j}}{\sqrt{6}} + \frac{\hat{k}}{\sqrt{6}},$$

luego $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$; $\cos\beta = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ y $\cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

1.4. Producto entre vectores: interno, cruz, triple. Propiedades

Definición 1.10. *El producto punto o escalar entre los vectores no nulos* $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ *y* $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, *que se denota por* $\vec{a}\cdot\vec{b}$, *es el número real dado por* $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

Ejemplo 1.7. *Sean* $\vec{a} = (6,4,-1)$ *y* $\vec{b} = (3,0,-4)$ *obtener el producto escalar entre ellos.*

Solución:
$\vec{a}\cdot\vec{b} = (6)(3) + (4)(0) + (-1)(-4) = 18 + 4 = 22$

Observación 1.6.

a) $\vec{a}\cdot\vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \parallel \vec{a} \parallel^2$.

b) $\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = 0$.

c) $\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$.

Propiedades del producto punto
Sean $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, vectores cualesquiera en $\mathbb{R}^3$ y $k \in \mathbb{R}$, entonces:

a) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ (conmuntatividad).

b) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$ (distributividad).

c) $(k\vec{a})\cdot\vec{b} = k(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot(k\vec{b}) = (\vec{a}\cdot\vec{b})k$.

d) $\vec{0}\cdot\vec{a} = \vec{0}$

Observación 1.7.

a) Si $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$*, entonces no se puede concluir que* $\vec{a}=\vec{b}$*.*

b) Si $\vec{a}\cdot\vec{c}=0$ *no necesariamente* $\vec{a}=\vec{0}\vee\vec{c}=\vec{0}$*.*

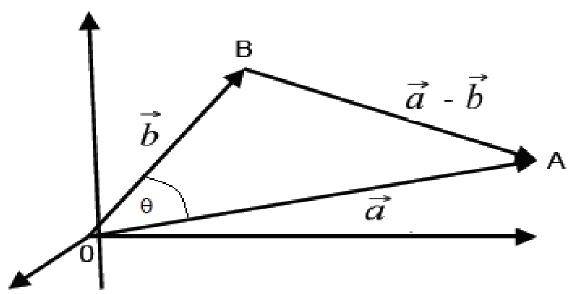
Ejemplo 1.8. *De la observación* $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$*, entonces no se puede concluir que* $\vec{a}=\vec{b}$*.*

Solución

Si $\vec{a}=(2,-1,-2)$, $\vec{b}=(-3,2,5)$ y $\vec{c}=(-1,-4,1)$. Entonces: $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=0$ y $\vec{a}\neq\vec{b}$. Además de $\vec{a}\cdot\vec{c}=0$, se tiene que $\vec{a}\neq\vec{0}$ y $\vec{c}\neq\vec{0}$.

Teorema 1.2. *Si los vectores* $\vec{a}$ *y* $\vec{b}$ *forman un ángulo* θ *(medida en radianes) y* $0<\theta<\pi$ *entonces:* $\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta$*. Si* $\vec{a}=\vec{0}$ *o* $\vec{b}=\vec{0}$ *entonces* $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

Demostración: Considerar $\vec{a}$ y $\vec{b}$ como en la figura



Aplicando el teorema del coseno en el $\triangle OAB$ se tiene:
$\|\vec{a}-\vec{b}\|^2=\|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2-2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta$. Por definición de producto punto

$$\|\vec{a}-\vec{b}\|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}.$$

Igualando, se tiene

$$\|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2-2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta=\|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b},$$

luego:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta.$$

Observación 1.8. *De lo anterior se concluye:* $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}$.

Ejemplo 1.9. *Dados los vectores* $\vec{a}=-\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ *y* $\hat{b}=-3\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}$*. Determinar el ángulo* θ *que ellos forman.*

Solución

$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}=\dfrac{3+4-4}{\sqrt{6}\sqrt{29}}=\dfrac{3}{\sqrt{174}}=0,227429413$; $\theta=76^o51'15''$

Teorema 1.3. *Dos vectores no nulos $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en $\mathbb{R}^3$ son* ***perpendiculares u ortogonales*** *(denotado por $\vec{a} \perp \vec{b}$) si, y sólo si $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.*

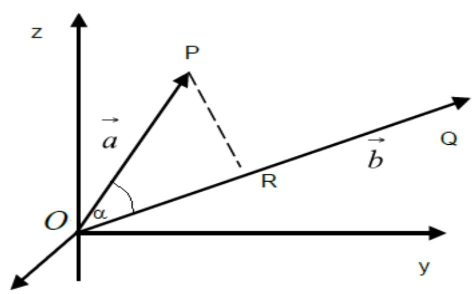
Demostración: $\Rightarrow$) Sea $\vec{a} \perp \vec{b}$, entonces $\theta = \frac{\pi}{2}$. Luego $\vec{a} \cdot \vec{b} = \| \vec{a} \| \| \vec{b} \| \cos \frac{\pi}{2} = 0$.

$\Leftarrow$) Sea $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores no nulos en $\mathbb{R}^3$ entonces $\| \vec{a} \| \neq 0$ y $\| \vec{b} \| \neq 0$, luego $\cos\theta = 0$. Por lo tanto $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Ejemplo 1.10. *Determinar el valor de t, de modo que $\vec{a} = t\hat{i} + 8\hat{j} + 8\hat{k}$ y $\vec{b} = -4\hat{i} + 6\hat{j} - 5\hat{k}$ sean ortogonales.*

Solución:
Como $\vec{a} \perp \vec{b}$ si, sólo si $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, luego $\vec{a} \cdot \vec{b} = -4t + 48 - 40 = 0 \Rightarrow t = 2$.

Definición 1.11. *La proyección del vector $\vec{OP}$ en la dirección $\vec{OQ}$ es el segmento de recta dirigido $\vec{OR}$ donde R es el pie de la perpendicular desde el punto P a la recta que contiene al vector $\vec{OQ}$*



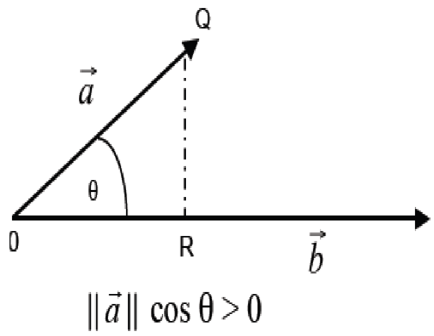
$\vec{OP} = \vec{a}$; $\vec{OR} = \vec{c}$; $\vec{OQ} = \vec{b}$

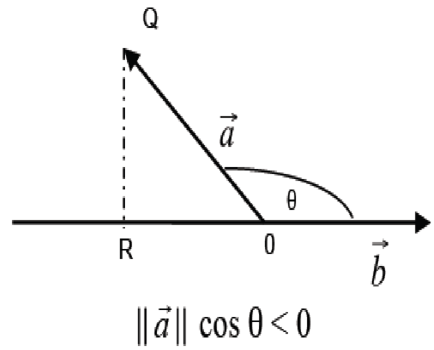
$\vec{OR}$ se denomina ***vector proyección*** *del vector $\vec{a}$ sobre el vector $\vec{b}$.*

Definición 1.12. *La proyección escalar del vector $\vec{a}$ sobre el vector $\vec{b}$ se define como $\| \vec{a} \| \cos\theta$ donde θ es el ángulo comprendido entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$, se denota por:*

$$Proy_{\vec{b}}(\vec{a}) = \| \vec{a} \| \cos\theta = \vec{a} \cdot \hat{b}.$$

Observar que la proyección escalar puede ser positiva o negativa según si $\theta < \frac{\pi}{2}$ o $\theta > \frac{\pi}{2}$.





Definición 1.13. *La proyección vectorial del vector $\vec{a}$ sobre el vector $\vec{b}$ se define como $\| \vec{a} \| \cos\theta\hat{b}$ donde $\hat{b}$ es el vector unitario en la dirección y sentido del vector $\vec{b}$. Se denota por :*

$$\overrightarrow{Proy_{\vec{b}}}(\vec{a}) = \|\vec{a}\| \cos\theta\hat{b} = (Proy_{\vec{b}}(\vec{a}))\hat{b}.$$

Ejemplo 1.11. *Determinar las proyecciones escalar y vectorial del vector $\vec{u} = -3\hat{i} - \hat{j} + 5\vec{k}$ sobre el vector $\vec{v} = -\hat{j} + 2\hat{k}$.*

Solución:
$Proy_{\vec{v}}(\vec{u}) = \vec{u} \cdot \hat{v} = \dfrac{1+10}{\sqrt{5}} = \frac{11}{\sqrt{5}}.$
$\overrightarrow{Proy_{\vec{v}}}(\vec{u}) = (Proy_{\vec{v}}(\vec{u}))\hat{v} = \dfrac{11}{\sqrt{5}}\dfrac{(-\hat{j}+2\hat{k})}{\sqrt{5}} = \dfrac{-11}{5}\hat{j} + \dfrac{22}{5}\hat{k}.$

1.4.1. Producto cruz o vectorial entre vectores. Propiedades

Definición 1.14. *El producto cruz o vectorial entre los vectores $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, que se denota por $\vec{a} \times \vec{b}$, está dado por: $\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$*

Observación 1.9. *El cálculo de $\vec{a} \times \vec{b}$ se puede realizar, usando la notación de determinantes.*

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \hat{k}$$

donde el determinante de segundo orden $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ se define por $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ y

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

es la notación para un determinante de tercer orden.

Ejemplo 1.12. *Si* $\vec{a} = (3, -2, 4)$ *y* $\vec{b} = (-2, 0, -5)$ *obtener* $\vec{a} \times \vec{b}$

Solución
Usando la definición
$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$
$\vec{a} \times \vec{b} = ((-2)(-5) - (4)(0), (4)(-2) - (3)(-5), (3)(0) - (-2)(-2)) = (10, 7, -4)$.
Usando determinante

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \hat{k} = 10\hat{i} + 7\hat{j} - 4\hat{k}$$

Propiedades del producto vectorial
Sean $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ y $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ vectores en $\mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$

a) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.

b) $\vec{0} \times \vec{a} = \vec{a} \times \vec{0} = \vec{0}$.

c) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$, no conmutativa.

d) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

e) $\alpha(\vec{a} \times \vec{b}) = (\alpha\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha\vec{b})$

Demostración:

b) $\vec{a} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = (a_2 a_3 - a_2 a_3)\hat{i} + (a_1 a_3 - a_1 a_3)\hat{j} + (a_1 a_2 - a_1 a_2)\hat{k} = \vec{0}$.

c) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\hat{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\hat{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\hat{k}$,

$$\begin{aligned} -(\vec{b} \times \vec{a}) &= -\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = -\left\{ \hat{i} \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \right\} \\ &= -\{(b_2 a_3 - a_2 b_3)\hat{i} - (b_1 a_3 - a_1 b_3)\hat{j} + (b_1 a_2 - a_1 b_2)\hat{k}\} \\ &= (a_2 b_3 - b_2 a_3)\hat{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\hat{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\hat{k} = \vec{a} \times \vec{b}. \end{aligned}$$

Observación 1.10.

1. *De las propiedades a) y b) y de la definición de producto cruz, se concluye que:*
   $\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = \vec{0}$.
   $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$; $\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$; $\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$.
   $\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}$; $\hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}$; $\hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$.

2. *El producto cruz de vectores no es asociativo. Contraejemplo:* $\hat{i} \times (\hat{i} \times \hat{j}) = \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$ *pero* $(\hat{i} \times \hat{i}) \times \hat{j} = \vec{0} \times \hat{j} = \vec{0}$.

Ejemplo 1.13. *Demostrar que si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores cualesquiera en $\mathbb{R}^3$ entonces*

$$\| \vec{a} \times \vec{b} \|^2 = \| \vec{a} \|^2 \| \vec{b} \|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2.$$

Solución:

Sea $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ entonces:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

y

$$\| \vec{a} \times \vec{b} \| = \sqrt{(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2}$$

luego:

$$\begin{aligned} \| \vec{a} \times \vec{b} \|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &= a_2^2b_3^2 - 2a_2b_3a_3b_2 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_1^2 - 2a_3b_1a_1b_3 + a_1^2b_3^2 + a_1^2b_2^2 - 2a_1b_2a_2b_1 + a_2^2b_1^2 \end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} \| \vec{a} \|^2 \| \vec{b} \|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ &= a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 \\ &\quad -(a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 + 2a_1b_1a_2b_2 + 2a_1b_1a_3b_3 + 2a_2b_2a_3b_2) \\ &= a_1^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 + a_3^2b_2^2 - 2a_1b_2a_2b_1 \\ &\quad -2a_3b_1a_1b_3 - 2a_2b_3a_3b_2. \end{aligned}$$

Comparando las expresiones se concluye: $\| \vec{a} \times \vec{b} \|^2 = \| \vec{a} \|^2 \| \vec{b} \|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$.

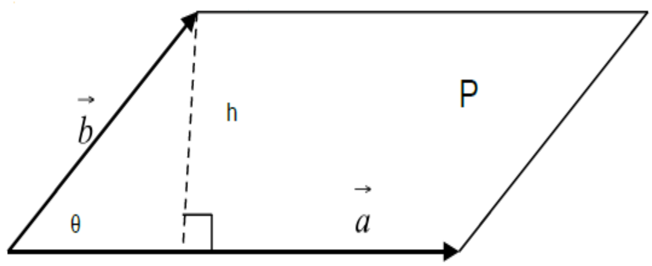
Teorema 1.4. *Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores en $\mathbb{R}^3$ y θ el ángulo que ellos forman entonces:*

$$\| \vec{a} \times \vec{b} \| = \| \vec{a} \| \| \vec{b} \| \operatorname{sen} \theta$$

Teorema 1.5. *Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ generan un paralelogramo, el área de éste viene dada por:* $A_p = \| \vec{a} \times \vec{b} \|$.

Demostración:

Considerando la figura



$A_p = (base)(Altura) = \| \vec{a} \| \| \vec{b} \| \operatorname{sen} \theta = \| \vec{a} \times \vec{b} \|$

Corolario 1.1. *Si los vectores son los lados de un triángulo, entonces el área de éste es:*

$$A_T = \frac{1}{2} \| \vec{a} \times \vec{b} \| .$$

Ejemplo 1.14. *Determinar el área del triángulo con vértices* $A(-5, 2, -3)$*,* $B(-1, -2, 4)$ *y* $C(2, -5, 1)$*.*

Solución

$\vec{AB} = (4, -4, 7)$; $\vec{AC} = (7, -7, 4)$. Entonces

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 4 & -4 & 7 \\ 7 & -7 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} \\ 4 & -4 \\ 7 & -7 \end{matrix} = -16\hat{\imath} + 49\hat{\jmath} - 28\hat{k} + 28\hat{k} + 49\hat{\imath} - 16\hat{\jmath} = 33\hat{\imath} + 33\hat{\jmath}.$$

Luego:

$$A_T = \frac{1}{2}\sqrt{(33)^2 + (33)^2} = \frac{33}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2} \| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \| .$$

Teorema 1.6. *Si* $\vec{a}$ *y* $\vec{b}$ *son dos vectores en* $\mathbb{R}^3$*, entonces* $\vec{a}$ *y* $\vec{b}$ *son paralelos si y sólo si* $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

Ejemplo 1.15. *Verificar que los vectores* $\overrightarrow{AB}$ *determinados por los puntos* $A(3, 1, 4)$*,* $B(4, 3, 1)$ *y* $\overrightarrow{CD}$ *determinado por los puntos* $C(2, 1, 3)$ *y* $D(3, 3, 0)$ *son paralelos.*

Solución

$\overrightarrow{AB} = (1, 2, -3)$, $\overrightarrow{CD} = (1, 2, -3)$. Luego

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \vec{0}.$$

El determinante es $(0, 0, 0)$ puesto que tiene dos filas iguales (o proporcionales).

1.4.2. Productos Triples

Definición 1.15. *Si $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ son vectores en $\mathbb{R}^3$, entonces la expresión $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ se llama producto triple escalar entre $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$.*

Teorema 1.7. *Si $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ y $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ entonces:*

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Demostración:

Se tiene que

$$\begin{aligned} \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) &= (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k})\cdot \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\ &= (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k})\cdot \left(\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}\hat{i} - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}\hat{j} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\hat{k} \right) \\ &= a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Observación 1.11.

a) *El triple producto escalar se efectúa en el orden que viene indicado.*

b) *En lo sucesivo no se usará el paréntesis para el producto triple escalar, ya que se subentiende la prioridad de las operaciones.*

Ejemplo 1.16. *Determinar el producto triple escalar entre los vectores: $\vec{a} = (-4, 6, -5)$; $\vec{b} = (2, 1, -1)$ y $\vec{c} = (2, 8, 8)$.*

Solución

$$\begin{aligned} \vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c} &= \begin{vmatrix} -4 & 6 & -5 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 8 & 8 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} \\ &= -64 - 108 - 70 = -242 \end{aligned}$$

Teorema 1.8. *Si $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son vectores en $\mathbb{R}^3$, entonces $\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}$.*

De forma similar se puede verificar que:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a}\times\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c}\times\vec{a}.$$

Teorema 1.9. *Si $\vec{a}$, $\vec{b}$ son vectores no paralelos y no nulos en $\mathbb{R}^3$, entonces el vector $\vec{a}\times\vec{b}$ es ortogonal a ambos $\vec{a}$ y $\vec{b}$.*

Demostración:

Del teorema se tiene: $\vec{a} \cdot \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{a} \cdot \vec{b}$ y además $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$, entonces

$\vec{a} \cdot \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \cdot \vec{b} = 0$, como $\vec{a}$ y $\vec{a} \times \vec{b}$ son no nulos, y su producto es cero, entonces $\vec{a}$ y $\vec{a} \times \vec{b}$ son ortogonales. De igual manera: $\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{0} = 0$, como $\vec{b}$ y $\vec{a} \times \vec{b}$ son no nulos, entonces $\vec{b}$ y $\vec{a} \times \vec{b}$ son ortogonales.

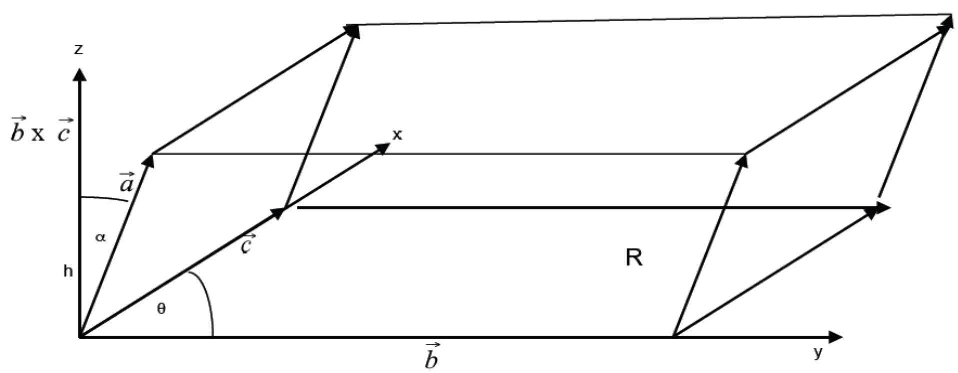
Observación 1.12. *Resumiendo todas las propiedades anteriormente mencionadas del producto cruz es posible plantear que:*

a) Si $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ entonces $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen el mismo sentido, o sentidos opuestos, o uno de estos vectores es cero.

b) Si $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$, entonces $\vec{a} \times \vec{b}$ es un vector cuya magnitud es numéricamente igual al área del paralelógramo de lados adyacentes a y b, cuya dirección es perpendicular a ambos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en el mismo sentido en el que avanzaría un tornillo de rosca derecha si se gira en la misma forma.

Teorema 1.10. *Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ vectores no coplanares en $\mathbb{R}^3$ y R el paralelepípedo generado al considerar estos vectores como sus aristas, entonces el volumen de este paralelepípedo esta dado por: $V_R = |\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}|$.*

Demostración: Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ como en la figura



Volumen R=(altura)(área basal). Área Basal=$\| \vec{b} \times \vec{c} \|$, Altura $h = \| \vec{a} \| \cos\alpha$, donde α es el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b} \times \vec{c}$. Luego,

$$\begin{aligned} V_R &= \|\vec{a}\| \cos\alpha \|\vec{b} \times \vec{c}\| \\ &= \|\vec{a}\| \|\vec{b} \times \vec{c}\| \cos\alpha \\ &= \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $V_R = |\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}|$.

Ejemplo 1.17. *Determinar el volumen del paralelepípedo cuyas aristas están representadas por los vectores:* $\vec{a} = -2\hat{\imath} - 5\hat{k}$, $\vec{b} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} - \hat{k}$ *y* $\vec{c} = -2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}$.

Solución

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & -5 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 5 + 20 - 2 = 9, \text{ luego } V_R = |\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}| = |9| = 9.$$

Ejemplo 1.18. *Dados los puntos* $A(-5, 2, -3)$, $B(-1, 0, 4)$ *y* $C(2, -7, 1)$. *Determinar el valor de* λ *para que el vector* $\vec{v} = 2\hat{\imath} - 5\lambda\vec{k}$ *sea coplanar con* $\overrightarrow{AB}$ *y* $\overrightarrow{BC}$.

Solución:

$\overrightarrow{AB} = 4\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 7\hat{k}$; $\overrightarrow{BC} = 3\hat{\imath} - 7\hat{\jmath} - 3\hat{k}$; $\vec{v} = 2\hat{\imath} - 5\lambda\hat{k}$, luego $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} \times \vec{v} = 0$, por lo tanto

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 7 \\ 3 & -7 & -3 \\ 2 & 0 & -5\lambda \end{vmatrix} = 140\lambda + 12 + 98 - 30\lambda = 110\lambda + 110 = 0,$$

de donde $\lambda = -1$. Por lo tanto $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\vec{v}$ son coplanares si $\lambda = -1$.

Ejercicios propuestos

1) Un automóvil recorre 3 km hacia el norte y luego 5 km hacia el NE. Hallar el desplazamiento resultante y la dirección.

2) Determine si las siguientes afirmaciones relacionadas con el producto punto son verdaderas o falsas. Justifique.

   a) $\| \vec{a} \|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$
   b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} = 0$ o $\vec{b} = 0$
   c) $\hat{\imath} \cdot \hat{k} = \hat{\jmath}$
   d) $\vec{a} = (\vec{a} \cdot \hat{\imath})\hat{\imath} + (\vec{a} \cdot \hat{\jmath})\hat{\jmath} + (\vec{a} \cdot \hat{k})\hat{k}$

3) Calcular los ángulos internos del $\triangle ABC$ cuyos vértices son los puntos $A(-1, 0, 2)$, $B(2, 1, -1)$ y $C(1, -2, , 3)$.

4) Dado los puntos $A(6, 1, 1)$, $B(-3, 2, 1)$, y $C(7, -2, 8)$ se pide:

   a) Un vector unitario en la dirección $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$
   b) Ángulos directores del vector $\overrightarrow{BC}$
   c) Determinar un punto D de modo que los puntos $ABDC$ formen un paralelógramo y calcular su perímetro

5) Hallar el valor de h de modo que $\vec{v} - h\vec{u}$ sea ortogonal a $\vec{u}$, donde $\vec{u} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$, con $\vec{v} = 7\hat{i} + 14\hat{k}$

6) Hallar las componentes del vector $\vec{a} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ en la dirección del vector $\vec{b} = 6\hat{i} + 7\hat{j} + 6\hat{k}$ ¿Cuál es la proyección vectorial de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$?

7) Si $\vec{a} = (-1, 0, 2)$, $\vec{b} = (2, 3, 6)$, $\vec{c} = (2, -2, 1)$, determinar:

   a) La proyección escalar de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$.

   b) La proyección escalar de $\vec{c}$ sobre $2\vec{a} - \vec{b}$.

   c) La proyección vectorial de $\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$ sobre el eje Y.

8) Determine un vector ortogonal a los dos vectores $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \vec{k}$ y $\hat{b} = \hat{i} + \hat{j}$

9) Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos $(3, -1, 2)$; $(1, -1. - 3)$ y $(4, -3, 1)$

10) Encontrar el volumen del paralelepípedo cuyas aristas están dadas por: $\vec{a} = \hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$; $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ y $\vec{c} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$

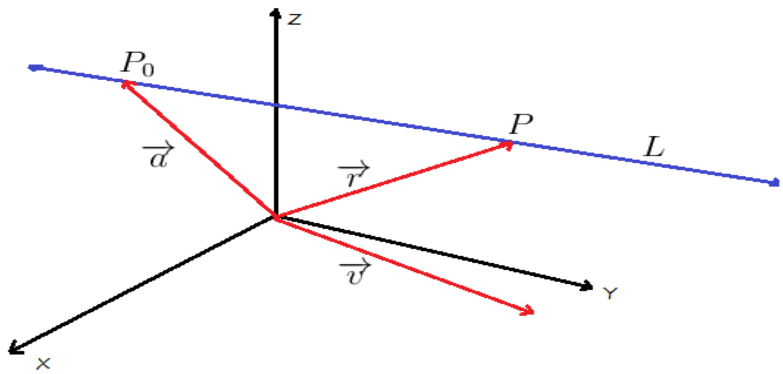
11) Encontrar la constante t de modo que los vectores $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$; $\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ y $3\hat{i} + t\hat{j} + 5\hat{k}$ sean coplanares.

1.5. Ecuación vectorial de una recta. Números directores

Definición 1.16. *Una recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y que es paralela al vector $\vec{v} = (a, b, c)$ no nulo es:*

$$L = \{P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \overrightarrow{P_0P} \parallel \vec{v}\}$$

$$L = \{P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \overrightarrow{P_0P} = t\vec{v}, t \in \mathbb{R} - \{0\}\}$$



$$\begin{array}{lcl} \vec{a} & : & \text{vector posición de } P_0, \\ \vec{r} & : & \text{vector posición de } P, \\ \vec{v} & : & \text{vector dirección de } L. \end{array}$$

Luego, $\overrightarrow{P_0P} = \vec{r} - \vec{a} = t\vec{v}$, $\vec{r} = \vec{a} + t\vec{v}$ la cual es llamada **Ecuación vectorial de** L.
Además,

$$\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(a, b, c),$$

igualando se tiene que $x - x_0 = at$, $y - y_0 = bt$, $z - z_0 = ct$ de donde se deduce, $x = x_0 + at$, $y = y_0 + bt$, $z = z_0 + at$ las cuales son llamadas **Ecuaciones paramétricas de** L.

Despejando el parámetro t e igualando, se obtiene la **Ecuación simétrica de** L:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}, a, b, c \neq 0.$$

Ejemplo 1.19. *Hallar la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos* $A(1, 2, 1), B(3, 5, -4)$

Solución
El vector dirección $\vec{v}$ está dado por $\overrightarrow{AB} = (2, 3, -5)$, entonces son posibles ecuaciones vectoriales de la recta:

$$(x, y, z) = (1, 2, 1) + t(2, 3, -5).$$

$$(x, y, z) = (1, 2, 1) + t(-2, -3, 5).$$

$$(x, y, z) = (3, 5, -4) + t(2, 3, -5).$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta son:

a) $x = 1 + 2t$, $y = 2 + 3t$, $z = 1 - 5t$.

b) $x = 1 - 2t$, $y = 2 - 3t$, $z = 1 + 5t$.

c) $x = 3 + 2t$, $y = 5 + 3t$, $z = -4 - 5t$.

Ejemplo 1.20. *Obtener la ecuación simétrica de la recta que pasa por los puntos $A(4, 2, 1)$ y $B(-7, -2, 5)$.*

Solución
El vector dirección es $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (-11, -4, 4)$, una ecuación simétrica sería:

$$\frac{x-4}{-11} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-1}{+4}, \text{ o } \frac{4-x}{11} = \frac{2-y}{4} = \frac{z-1}{4},$$

otra ecuación sería:

$$\frac{x+7}{11} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-5}{-4}, \text{ o } \frac{x+7}{11} = \frac{y+2}{4} = \frac{5-z}{4}.$$

Si a, b, ó $c = 0$, la ecuaciones simétricas son:

$$x = x_0, \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}, \text{ que es una recta en el plano } x = x_0$$

$$y = y_0, \frac{x-x_0}{a} = \frac{z-z_0}{c}, \text{ que es una recta en el plano } y = y_0$$

$$z = z_0, \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}, \text{ que es una recta en el plano } z = z_0.$$

Ejemplo 1.21. *Encontrar una ecuación simétrica de la recta que pasa por los puntos $A(2, 2, -1)$ y $B(-3, 2, 2)$.*

Solución:
El vector dirección es $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (-5, 0, 3)$, y una ecuación simétrica sería:

$$y = 2, \frac{x-2}{-5} = \frac{z+1}{3} \text{ (recta en el plano } y = 2)$$

otra ecuación simétrica: $y = 2, \dfrac{x+3}{5} = \dfrac{z-2}{-3}$

Ejercicio: Encontrar la ecuación vectorial, paramétrica y simétrica de la recta que pasa por $P(-2, -4, 3)$ y es paralela al vector $\vec{a} = 3\hat{i} - 7\hat{j} + \hat{k}$.

1.5.1. Posiciones relativas de rectas en el espacio

Sean L_1 y L_2 rectas en $\mathbb{R}^3$ con vectores dirección $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$ respectivamente, entonces:

1) L_1 y L_2 son paralelas si $\vec{v_1} \parallel \vec{v_2}$, es decir $\vec{v_1} = m\vec{v_2}$.

a) Si $L_1 \parallel L_2$ entonces o son coincidentes (los puntos de L_1 pertenecen a L_2) o no se intersectan $(L_1 \cap L_2 = \emptyset)$.

b) Si L_1 no es paralela con L_2 entonces o son concurrentes ($L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$) o se cruzan en el espacio ($L_1 \cap L_2 = \emptyset$).

2) L_1 y L_2 son ortogonales si $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$.

Ejemplo 1.22. *Dadas las rectas:*

$$\begin{aligned} L_1 &: x = 2 + 2t, y = -1 + t, z = 2 - 3t, \\ L_2 &: x = -4s, y = 2 - 2s, z = 3 + 6s, \\ L_3 &: x = 6 + 6r, y = 1 + 3r, z = -4 - 9r. \end{aligned}$$

Determinar si las rectas son paralelas o coincidentes.

Solución:
$\vec{v}_1 = (2, 1, -3), \vec{v}_2 = (-4, -2, 6) = -2(2, 1, -3), \vec{v}_3 = (6, 3, -9) = 3(2, 1, -3)$, como $\vec{v}_2 = -2\vec{v}_1$ y $\vec{v}_3 = 3\vec{v}_1$ entonces $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$. Para determinar si son o no son coincidentes, verificamos si P_0 pertenece a L_1.

1. P_0(0,2,3) de L_2 se reemplaza en L_1 :

$$0 = 2 + 2t \Rightarrow t = -1$$

$$2 = -1 + t \Rightarrow t = 3$$

$$3 = 2 - 3t \Rightarrow t = -\frac{1}{3},$$

   luego L_1 y L_2 no son coincidentes.

2. P_0(6,1,-4) de L_3 se reemplaza en L_1 :

$$6 = 2 + 2t \Rightarrow t = 2$$

$$1 = -1 + t \Rightarrow t = 2$$

$$-4 = 2 - 3t \Rightarrow t = 2,$$

   luego L_1 y L_3 son coincidentes.

Ejemplo 1.23. *Dadas las rectas:*

$$\begin{aligned} L_1 &: x = -4 + t, y = 3t, z = 3 - t, \\ L_2 &: x = -3 + 2s, y = -2 + 3s, z = 6 - 4s, \\ L_3 &: x = 5 + r, y = -1 - 4r, z = -4 + r. \end{aligned}$$

Determinar si las rectas son concurrentes o se cruzan

Solución:
Si L_1 y L_2 son concurrentes, $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ resolviendo el sistema

$$\begin{array}{rcll} -4+t & = & -3+2s & (1) \\ 3t & = & -2+3s & (2) \\ 3-t & = & 6-4s & (3) \end{array}$$

de (1) y (2) se obtiene, $t = \frac{-7}{3}, s = -\frac{5}{3}$ y remplazando en (3) no satisfacen la ecuación luego $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ y las rectas se cruzan.

Analizando L_2 y L_3:

$$\begin{array}{rcll} -3+2s & = & 5+r & (1) \\ -2+3s & = & -1-4r & (2) \\ 6-4s & = & -4+r & (3) \end{array}$$

de (1) y (3) se obtiene $s = 3$, $r = -2$ y reemplazando en (2) satisface la ecuación, luego, $L_2 \cap L_3 \neq \emptyset$ y las rectas son concurrentes, es decir se cortan en $P(3, 7, -6)$.

Ejemplo 1.24. *Hallar la ecuación de la recta L que pasa por el punto $P(3, 1, 2)$ y es perpendicular a las rectas $L_1 : x = 1 + t, y = -2t, z = 2 + 2t$ y $L_2 : x = 2 + 3s, y = 6, z = -3 - s$.*

Solución:
Como $L \perp L_1 \Rightarrow \vec{v} \perp \vec{v}_1$, $L \perp L_2 \Rightarrow \vec{v} \perp \vec{v}_2$ luego, $\vec{v} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ y $\vec{v}_1 = (1, -2, 2)$, $\vec{v}_2 = (3, 0, -1)$

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \hat{i}(2) - \hat{j}(-1-6) + \hat{k}(6) = (2, 7, 6)$$

entonces la ecuación de L es: $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{7} = \dfrac{z-2}{6}$.

Ejercicio: Determinar si las rectas son paralelas u ortogonales:

a) $\begin{array}{lcll} L_1 & : & x = 4 - 2t, & y = 1 + 4t, \quad z = 3 + 10t, \\ L_2 & : & x = t, & y = 6 - 2t, \quad z = \frac{1}{2} - 5t. \end{array}$

b) $\begin{array}{lcll} L_1 & : & x = -6 - 6t, & y = 20 + 3t, \quad z = 1 + 2t, \\ L_2 & : & x = 5 + 2t, & y = -9 - 4t, \quad z = 1 + 7t. \end{array}$

Observación 1.13.

1) *El ángulo entre dos rectas está dado por el ángulo entre sus vectores dirección.*

2) *La distancia de un punto S a una recta L, $d(S, L)$, es la longitud del segmento perpendicular a la recta que va del punto a la recta.*

3) *La distancia entre dos rectas, L_1 y L_2 que se cruzan está dado por: $d(L_1, L_2) = |Proy_{\vec{n}}\vec{v}|$, donde $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$ y $\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$.*

Ejercicios propuestos

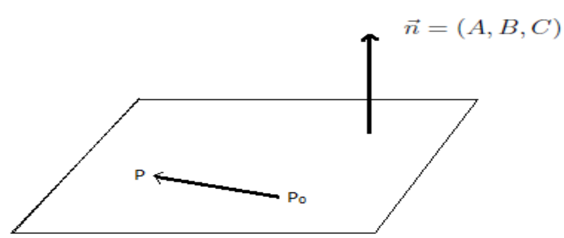
1) Hallar la distancia del punto $P(3,2,-3)$ a la recta $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+3}{3}$

2) Hallar la distancia entre $L_1 : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{4} = 5 - z$ y $L_2 : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = z - 4$

1.6. Ecuación vectorial de un plano

Definición 1.17. *Por un punto dado $P(x,y,z)$ pasan infinitos planos. Si se especifica un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y un vector $\vec{n}$, existe solo un plano $\mathbb{P}$ que contiene a P_0 que es perpendicular a $\vec{n}$, llamado **vector normal**. Luego,*

$$\begin{aligned} \mathbb{P} &= \{P(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n}\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0\}. \end{aligned}$$



De la definición anterior se puede deducir las siguientes ecuaciones del plano

$$\begin{aligned} \textbf{Ecuación vectorial} &: \overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0 \\ \textbf{Ecuación cartesiana} &: A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0 \\ \textbf{Ecuación general} &: Ax + By + Cz + D = 0 \text{ con } \vec{n} = (A,B,C) \\ \textbf{Ecuación simétrica} &: \tfrac{x}{a} + \tfrac{y}{b} + \tfrac{z}{c} = 1, \end{aligned}$$

donde a, b, c y son intersecciones del plano con los ejes.

Observación 1.14.

1) Las ecuaciones de los planos paralelos a los planos coordenados son:

$$x = x_0, \ \textit{plano paralelo al plano } YZ \textit{ que pasa por } (x_0, 0, 0),$$

$$y = y_0, \ \textit{plano paralelo al plano } XZ \textit{ que pasa por } (0, y_0, 0),$$

$$z = z_0, \ \textit{plano paralelo al plano } XY \textit{ que pasa por } (0, 0, z_0).$$

2) Las rectas de intersección de un plano con los planos coordenados se llaman ***trazas***

$$L_1 : By + Cz + D = 0, x = 0 \text{ traza en el plano } YZ.$$

$$L_2 : Ax + Cz + D = 0, y = 0 \text{ traza en el plano } XZ.$$

$$L_3 : Ax + By + D = 0, z = 0 \text{ traza en el plano } XY.$$

3) Dos planos son paralelos si, y sólo si sus vectores normales son paralelos.

4) Dos planos son perpendiculares si, y sólo si sus vectores normales son perpendiculares.

5) El ángulo entre dos planos es el ángulo formado por sus vectores normales.

Ejemplo 1.25. *Encontrar la ecuación del plano que contiene a los puntos* $A(-3, 2, 4), B(1, 5, 7)$ *y* $C(2, 2, -1)$.

Solución:
Un vector normal al plano es $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$, como $\overrightarrow{AB} = (4, 3, 3)$ y $\overrightarrow{AC} = (5, 0, -5)$ entonces $\vec{n} = \hat{i}(-15) - \hat{j}(-20 - 15) + \hat{k}(-15) = (-15, 35, -15)$ o $\vec{n} = (-3, 7, -3)$, luego la ecuación es $-3(x + 3) + 7(y - 2) - 3(z - 4) = 0$, o bien $-3x + 7y - 3z - 11 = 0$.

Ejercicio

Encontrar la ecuación del plano que contiene al punto $(5, 1, 3)$ y es perpendicular al vector $2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$.

1.6.1. Distancia de un punto a un plano

La distancia de un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ a un plano de ecuación $Ax+By+Cz+D = 0$ está dada por

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

1.6.2. Intersección de dos planos

Dos planos no paralelos, de vectores normales $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$, se intersectan en una recta que recibe el nombre de recta de intersección y su vector dirección está dado por $\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

Ejemplo 1.26. *Entontrar la ecuación de la recta de intersección de los planos* $\mathbb{P}_1 : x-2y+z = 0$ *y* $\mathbb{P}_2 : 3x + y + 2z - 7 = 0$.

Solución:
$\vec{n}_1 = (1, -2, 1)$, $\vec{n}_2 = (3, 1, 2)$ entonces

$$\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix},$$

es decir, $\vec{v} = (-5, 1, 7)$. Luego buscamos el punto P de intersección de L y el plano $\mathbb{P}$, haciendo $z = 0$ en cada ecuación y resolviendo el sistema,

$$\begin{aligned} x - 2y &= 0 \\ 3x + y &= 7, \end{aligned}$$

se tiene $x = 2$ e $y = 1$. Por tanto, una ecuación paramétrica de la recta es

$$x = 2 - 5t, y = 1 + t, z = 7t.$$

1.6.3. Ángulo entre una recta y un plano

El ángulo θ entre una recta L y un plano $\mathbb{P}$ es el complemento del ángulo α que forma el vector dirección de la recta L con la normal del plano.

Ejemplo 1.27. *Hallar el ángulo que forma la recta L definida por las ecuaciones $2x + y - z = 0$, $x + y + z - 1 = 0$ con el plano XY.*

Solución:
Un vector dirección de L es:

$$\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2, -3, 1).$$

Un vector normal del plano XY es $\vec{n} = \hat{k} = (0, 0, 1)$, luego,

$$\cos\theta = \frac{(2, -3, 1) \cdot (0, 0, 1)}{\sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{14}}, \theta = 74,5^o, \alpha = 15,5^o.$$

Ejercicio: Resolver las siguientes situaciones,

1) ¿Para qué valor de m la recta $L : \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{m} = \frac{z+2}{-2}$ es paralela al plano $\mathbb{P} : x - 3y + 6z + 7 = 0$?

2) ¿Para qué valores de a y b, la recta $L : \frac{x-2}{a} = \frac{y+1}{4} = \frac{5-z}{3}$ es perpendicular al plano $\mathbb{P} : 3x - 2y + bz + 1 = 0$?

3) Obtener la ecuación del plano que contiene a $P(3, -2, 1)$ y a la recta $L : x + 2 = 5 - y = \frac{z}{6}$.

4) Hallar las coordenadas del punto de intersección del plano $\mathbb{P} : x + 4y - z + 5 = 0$ y la recta de ecuacion: $x - 1 = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{4}$

Ejercicios propuestos

1) Encontrar la ecuación paramétrica y simétrica de la recta que pasa por los puntos $A(1, 2, 1)$ y $B(5, -1, 1)$.

2) Hallar la ecuación paramétrica y simétrica de la recta L que es paralela a la recta de ecuación $x = 2t + 1, y = -2t + 3, z = -t + 5$ y que pasa por el punto $(2, 1, -1)$.

3) Hallar la ecuación simétrica de la recta L que pasa por el punto $(-4, -3, 11)$ y es paralela a un vector que es perpendicular a los vectores $\vec{a} = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k}$, $\vec{b} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 2\hat{k}$.

4) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, -1, 1)$ y es perpendicular a las rectas de ecuaciones $L_1 : \frac{x-1}{4} = y - 2 = z - 3$, $L_2 = \frac{1-x}{2} = y - 2 = 3 - z$.

5) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(3, 2, 6)$ y es paralelo al plano

   $2x + 3y - z = 4$.

6) Encontrar el ángulo agudo formado por los planos: $3x + y - z + 3 = 0$, $x - y + 4z - 9 = 0$.

7) Encontrar la ecuación del plano que pasa por el punto $A(1, -2, 3)$ y es paralelo al plano $x - 3y + 2z = 0$.

8) Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(2, -1, -1)$ y $B(1, 2, 3)$ y es perpendicular al plano $2x + 3y - 5z - 6$=0.

9) Encontrar la ecuación del plano que contiene a la recta $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{4}$ y es perpendicular al plano $2x + y - 3z + 4 = 0$.

10) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, -2, -3)$ y es perpendicular al plano de ecuación $x - 3y + 2z + 4 = 0$.

11) Encontrar la ecuación paramétrica de la recta que pasa por el punto $(1, 4, -2)$ y es paralela a los planos: $6x + 2y + 2z + 3 = 0$, $3x - 5y - 2z - 1 = 0$.

12) Hallar la ecuación paramétrica de la recta que pasa por el punto $(1, -1, 1)$ y es perpendicular a la recta $x = 2, y = z$ y paralela al plano $x + y - z = 0$.

1.7. Superficies cilíndricas y cuádricas

1.7.1. Superficies cilíndricas

Definición 1.18. *Se denomina Superficie al conjunto de puntos $P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que satisface una ecuación de la forma $F(x, y, z) = 0$.*

Definición 1.19. *La intersección de una superficie y un plano se llama traza.*

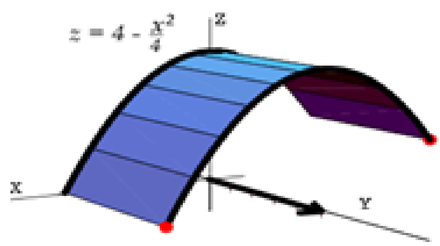
Dentro de las superficies nos interesan los planos, los cilindros y las superficies cuádricas.

Definición 1.20. *Superficies cilíndricas. Son superficies que se generan a partir de una curva que se mueve en el espacio (generatriz), siguiendo una trayectoria determinada (directriz).*

Trazar la gráfica de una superficie de este tipo es muy simple, la idea es arrastrar la generatriz en la dirección de la directriz. El movimiento de la generatriz forma la superficie, por la traza que va dejando.

Ejemplo 1.28. *Graficar* $z = 4 - \dfrac{x^2}{4}$ *(generatriz) y como directriz el vector* $\vec{u} = (0, 5, 0)$

Solución:
La curva generatriz es una parábola que se origina en el plano XZ.



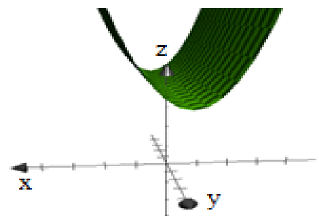
Observación 1.15. *Un cilindro circular recto tiene como generatriz una circunferencia y como recta directriz un vector o una recta paralela a uno de los ejes coordenados.*

Si en la ecuación $F(x, y, z) = 0$, alguna de las variables x, y o z es libre (no aparece), su gráfica corresponde a un cilindro y para trazarla:

- Dibujar la traza de la superficie $F(x, y, z) = 0$ sobre el plano coordenado, correspondiente a las variables no libres (generatriz).
- Luego, mover esta curva en la dirección del eje coordenado correspondiente a la variable libre (directriz).

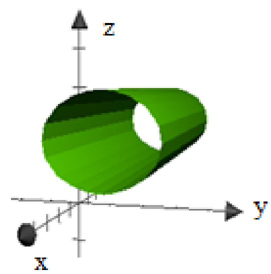
Ejemplo 1.29. *Trazar la gráfica de la superficie cilíndrica cuya ecuación es* $z = 4 + x^2$.

Solución: En la ecuación, la variable libre es y. Dibujamos la traza $z = 4 + x^2$ (parábola) sobre el plano $y = 0$ (plano XZ), luego movemos esta traza a lo largo del eje y para generar la gráfica de la superficie, como se muestra en la figura.



Ejemplo 1.30. *Trazar la gráfica de* $\dfrac{(y-2)^2}{2} + (z-2)^2 = 1$

Solución: La ecuación representa una superficie cilíndrica, consta de dos variables, la variable libre es x, entonces dibujamos la traza sobre el plano $x = 0$ (plano YZ) y la desplazamos a lo largo del eje X, como se muestra en la figura.



1.7.2. Superficies Cuádricas

Definición 1.21. *Una superficie cuádrica es aquella que se puede representar mediante una ecuación de segundo grado, de la forma:*

$$F(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0.$$

Se verán los casos más simples de estas superficies. La forma principal de las cuádricas simplificando al máximo esta ecuación, usando traslaciones apropiadas para llevarlas a uno de los siguientes tipos: elipsoide, hiperboloide, paraboloide y conos, con eje de simetría paralelo a uno de los ejes, es de la forma:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0.$$

Estas superficies se caracterizan porque sus trazas, corresponden a secciones cónicas (circunferencias, elipses, hipérbolas, parábolas, etc.).

Elipsoide

La ecuación principal o estándar es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}+\frac{(z-l)^2}{c^2}=1.$$

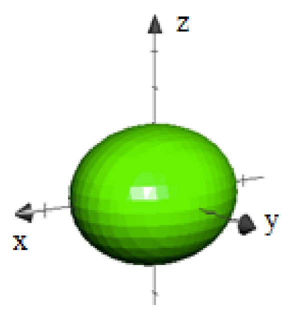
La ecuación canónica, centro $C(0,0,0)$, es:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

El eje mayor del elipsoide es paralelo al eje X (suponiendo $a>b$ y $a>c$).

Las trazas del elipsoide sobre planos paralelos a los planos coordenados corresponden a un punto o una elipse.

- Con $x=h$ se tiene $\dfrac{(y-k)^2}{b^2}+\dfrac{(z-l)^2}{c^2}=1$, elipse en el plano $x=h$.
- Con $y=k$ se tiene $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(z-l)^2}{c^2}=1$, elipse en el plano $y=k$.
- Con $x=l$ se tiene $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$, elipse en el plano $z=l$.



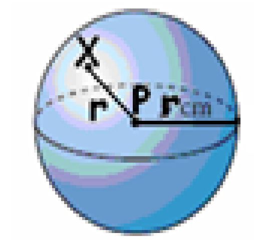
Esfera

Un caso particular de elipsoide es cuando $a=b=c$, el cual corresponde a una esfera. La superficie esférica es el lugar geométrico de los puntos del espacio cuya distancia al centro $C(a,b,c)$ es constante: r y su ecuación general, podría ser, de la forma:

$$x^2+y^2+z^2+Dx+Ey+Fz+G=0$$

y su ecuación principal o estándar es

$$(x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2=r^2.$$



Paraboloide elíptico

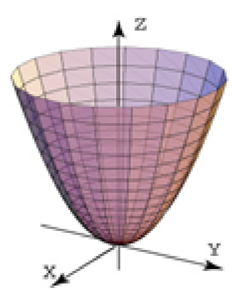
La ecuación principal o estándar es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=\frac{z-l}{c}.$$

La ecuación canónica es:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}.$$

Sus trazas sobre planos verticales, son parábolas. Si observamos la ecuación podemos establecer algunas relaciones importantes como: el eje de simetría del paraboloide es paralelo a la variable z, el paraboloide es cóncavo hacia arriba (respecto al eje de simetría) si $c > 0$ y hacia abajo si $c < 0$.



Paraboloide hiperbólico o silla de montar

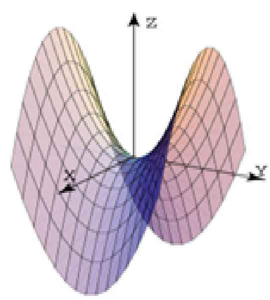
Ecuación principal o estándar:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = \frac{z-l}{c}.$$

La ecuación canónica es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

Sus trazas sobre planos horizontales son hipérbolas o dos rectas ($z = 0$). Sus trazas sobre planos verticales paralelos al plano XZ son parábolas que abren hacia abajo. Las trazas sobre planos verticales paralelos al plano YZ son parábolas que abren hacia arriba. Su gráfica tiene la forma de una silla de montar.



Cono elíptico

Ecuación principal o estándar:

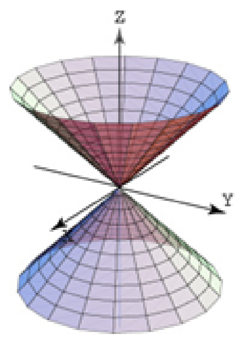
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(z-l)^2}{c^2} = 0.$$

La ecuación canónica es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

El eje de simétria del cono es paralelo al eje z (variable con coeficiente negativo).

Sus trazas sobre planos horizontales son elipses. Sus trazas sobre planos verticales corresponden a hipérbolas o un par de rectas.



Hiperboloide de una hoja

Ecuación principal o estándar

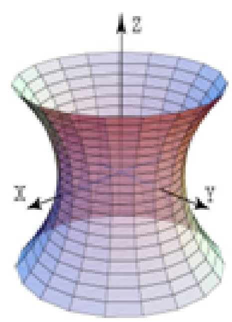
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(z-l)^2}{c^2} = 1.$$

La ecuación canónica es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

El eje transversal del hiperboloide de una hoja es paralelo al eje z (es la variable con coeficiente negativo).

Sus trazas sobre planos horizontales son elipses. Sus trazas sobre planos verticales son hipérbolas o un par de rectas que se intersecan.



Hiperboloide de dos hojas

Ecuación principal o estandár:

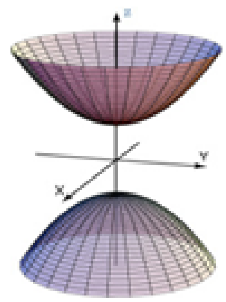
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(z-l)^2}{c^2} = 1.$$

La ecuación canónica es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

El eje transversal del hiperboloide de dos hojas es paralelo al eje x (es la variable con coeficiente positivo).

Su gráfica consta de dos hojas separadas. Sus trazas sobre planos horizontales son elipses. Sus trazas sobre planos verticales son hipérbolas.



Ejemplos

1. Determinar si la ecuación: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6z - 12 = 0$ corresponde a una esfera, y en caso afirmativo, obtener el radio y centro.

   Solución:

   $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6z - 12 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 + (z+3)^2 = 25.$

   La ecuación corresponde a una esfera de centro $C(2, 0, -3)$ y radio $r = 5$.

2. Identificar cada una de las siguientes superficies cuádricas:

   a) $4x^2 - y^2 + 2z^2 + 4 = 0.$

   b) $x^2 + 2z^2 - 6x - y + 10 = 0.$

   Solución:

   a) Dividiendo por -4 la primera ecuación obtenemos: $-x^2 + \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{2} = 1$ que corresponde a un hiperboloide de dos hojas, con el eje y como eje de simetría.

   b) Completando cuadrado de binomio en x, obtenemos: $y-1 = (x-3)^2 + 2z^2$ que corresponde a un paraboloide elíptico con eje paralelo al eje y.

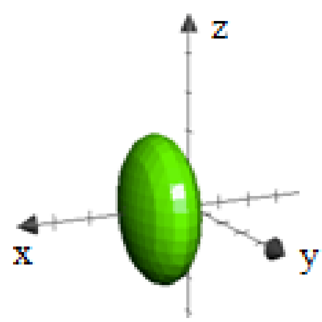
3. Identificar y graficar la superficie de ecuación $4x^2 + y^2 + z^2 - 8x = 0$.

   Solución

   Completamos cuadrado de binomio en la variable x,
   $4x^2 - 8x + y^2 + z^2 = 0 \Leftrightarrow 4(x^2 - 2x) + y^2 + z^2 = 0 \Leftrightarrow 4(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4$. Así

$$\frac{(x-1)^2}{1} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1.$$

   Corresponde a un elipsoide.



1.7.3. Sólidos

Definición 1.22. *Un sólido es un conjunto de superficies que definen una superficie cerrada, el sólido tendrá tantas caras como superficies la conforman. La mayoría son superficies comunes tales como planos, cilindros y en algunos casos cuádricas.*

Para la construcción de sólidos se requiere graficar cuidadosamente cada una de las superficies involucradas, además de establecer las curvas de intersección entre superficies.

Ejemplos

1. Graficar el sólido definido por las siguientes superficies:

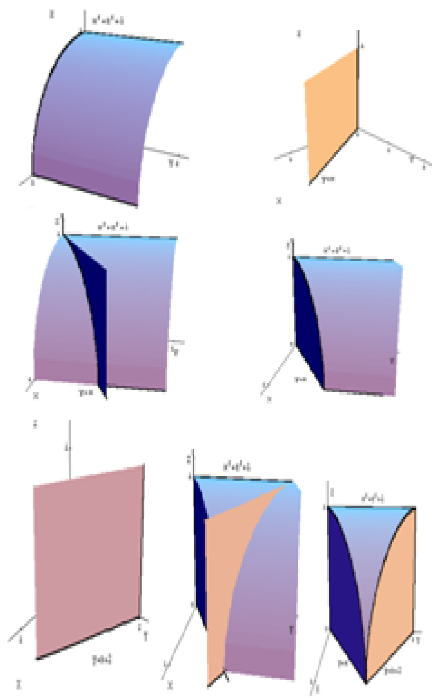
$$x^2 + y^2 = 1,\ y = x,\ y + x = 2,\ x = 0 \text{ y } z = 0.$$

   Solución:

   Las superficies que conforman el sólido son los planos coordenados $z = 0$ representa el plano XY, $x = 0$ representa el plano YZ; el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y los planos $y = x$ e $y + x = 2$.

a) Primero graficamos en un mismo sistema de coordenadas rectangulares la primera y segunda superficie. Como se puede observar la curva de intersección es una curva en forma de parábola, además eliminamos el pedazo del cilindro que está entre el plano XZ y el plano $y = x$ como se indica en la figura.

b) Enseguida representamos la otra superficie correspondiente al plano $y + x = 2$, lo insertamos en la figura. La curva de intersección tiene forma parabólica y podemos visualizarla en la figura, obteniendo como resultado el sólido, el número de caras de este sólido coincide con el número de superficies involucradas.



2. La esfera $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 25$ y el plano $2x - 2y + z = 0$ se cortan en una circunferencia. Determinar su radio.

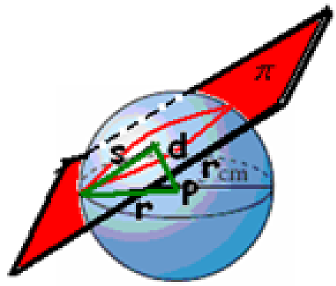
Solución:

La esfera tiene centro de la esfera $P(3, -2, 1)$ al plano $2x - 2y + z - 2 = 0$ se obtiene:

$$d = \frac{|2 \cdot 3 - 2 \cdot (-2) + 1 - 2|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1}} = \frac{9}{\sqrt{9}} = 3.$$

El radio s de la circunferencia se obtiene (observar el gráfico adjunto) aplicando el teorema de Pitágoras:

$$s^2 + d^2 = r^2 \Leftrightarrow s = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4.$$



Ejercicios propuestos

1. En los siguientes ejercicios, describir y dibujar la superficie:

   a) $z = 3$
   b) $y^2 + z^2 = 9$
   c) $x^2 - y = 0$
   d) $y^2 - z^2 = 4$
   e) $4x^2 + y^2 = 4$
   f) $z - \sin(y) = 0$

2. En los siguientes ejercicios, identificar y dibujar la superficie cuádrica.

   a) $x^2 + \dfrac{y^2}{4} + z^2 = 1$
   b) $z^2 - x^2 - \dfrac{y^2}{4} = 1$
   c) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} + \dfrac{z^2}{25} = 1$
   d) $16x^2 - y^2 + 16z^2 = 4$
   e) $z^2 = x^2 + \dfrac{y^2}{4}$
   f) $16x^2 + 9y^2 + 16z^2 - 32x - 36y + 36 = 0$
   g) $z = x^2 + 4y^2$
   h) $9x^2 + y^2 - 9z^2 - 54x - 4y - 54z + 4 = 0$
   i) $x^2 - y + z^2 = 0$
   j) $x^2 - y^2 + z = 0$

3. En los siguientes ejercicios, dibujar la región limitada por las gráficas de las ecuaciones dadas.

   a) $z = 2\sqrt{x^2 + y^2},\ z = 2$
   b) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2},\ y = 2z,\ z = 0$
   c) $x^2 + y^2 = 1,\ x + z = 2,\ z = 0$
   d) $z = \sqrt{4 - x^2},\ y = \sqrt{4 - x^2},\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$

4. Describir y dibujar la superficie.

   a) $x + 2y + 3z = 6$
   b) $16x^2 + 16y^2 - 9z^2 = 0$
   c) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} + z^2 = -1$
   d) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} + z^2 = 1$
   e) $y^2 + z^2 = 16$
   f) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{100} = 1$

5. Graficar cada uno de los siguientes sólidos, que están limitados por las superficies indicadas.

   a) $x + y = 1,\ x = 1 - x^2,\ z = 0,\ y = 0,\ x = 0$
   b) $x^2 = 4 - z,\ z = 3x,\ y = 4,\ y = 0,\ x = 0$
   c) $z = 4 - x^2,\ 4x - 2y - z = 0,\ 4y + z = 12,\ x = y = z = 0$
   d) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 1,\ x + y + z = 4,\ x = 2,\ y = 2,\ x = y = z = 0$

Capítulo 2

UNIDAD II: POLINOMIOS

2.1. Definición, igualdad y grado de un polinomio

2.1.1. Introducción

El concepto de polinomio se empieza a introducir desde los primeros pasos del Álgebra. Así, todos sabemos que $2 + 3x - x^2$ y que $x^2 + 3x^3$ son expresiones polinómicas o bien ”polinomios en x”.

Analicemos este concepto para obtener finalmente una definición de ”polinomio en x”.

Tácitamente entendemos que $0x^t$ y 0 son idénticos como polinomios pero no como escritura formal. Análogamente $1x^t$ y x^t, así como $0 + ax^t$ y ax^t son idénticos como polinomios en x. Luego nos resulta claro que, por ejemplo, los polinomios $2 + x^2$, $2 + 0x + x^2$, $2 + 0x + 1x^2 + 0x^3$, $2 + 0x + 1x^2 + 0x^3 + 0x^4 + 0x^5$, etc. son todos idénticos entre sí.

De este modo podemos decir que cualquier polinomio en x se puede escribir como una suma infinita:

$$(*) \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + ...$$

donde a partir de cierto $i = m$ todos los a_i son nulos. Estos a_i se dicen coeficientes del polinomio en x y son números.

Ejemplo 2.1.

a) $x^4 = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + 1x^4 + 0x^5 + 0x^6 + ...$

b) $3x^3 - x^2 + x - 1 = (-1) + 1x + (-1)x^2 + 3x^3 + 0x^4 + 0x^5 + ...$

c) $3 - x^4 + x^3 - 2x^5 = 3 + 0x + 0x^2 + 1x^3 + (-1)x^4 + (-2)x^5 + 0x^6 + ...$

d) $0 = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + ...$

En otras palabras podríamos decir que un polinomio en x es una suma infinita $(*)$ con un número finito de coeficientes no nulos.

En el ejemplo $a)$ hay un coeficiente no nulo, en $b)$ y en $c)$ hay 4 coeficientes no nulos y en $d)$ hay 0.

Resulta lógico preguntarse ¿qué es x? El término x será simplemente algo no determinado, que se comporta como un número cualquiera, pero que no necesariamente debe ser un número. Por esto x se dice una indeterminada o bien una variable.

2.1.2. Definición de polinomio

Definición 2.1. *Un* ***polinomio en la indeterminada o variable*** x ***con coeficientes complejos*** *es una suma infinita:*

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + a_{n+1}x^{n+1} + ... = \sum_{i=0}^{\infty} a_ix_i$$

donde $a_i \in \mathbb{C}$, $\forall i = 0, 1, 2, ...$ *y todos los* a_i*, salvo un número finito de ellos, son cero.*

Observación 2.1. *En particular, en la definición, se tiene del polinomio* $p(x)$

a) En $p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_ix_i$*, cada uno de los sumandos es un* ***término del polinomio*** $p(x)$*. El término* a_0*, es el término constante o coeficiente de* x^0*. En general:* a_i *es el coeficiente de* x^i, $\forall i = 0, 1, 2, ...$

b) Denotamos por:

$* \ \mathbb{C}[x] = \{p(x) : p(x) \text{ es polinomio en } x \text{ con coeficientes complejos}\}$

$* \ \mathbb{R}[x] = \{p(x) : p(x) \text{ es polinomio en } x \text{ con coeficientes reales}\}$

$* \ \mathbb{Q}[x] = \{p(x) : p(x) \text{ es polinomio en } x \text{ con coeficientes racionales}\}$

$* \ \mathbb{Z}[x] = \{p(x) : p(x) \text{ es polinomio en } x \text{ con coeficientes enteros}\}$

Claramente tenemos: $\mathbb{Z}[x] \subset \mathbb{Q}[x] \subset \mathbb{R}[x] \subset \mathbb{C}[x]$.

c) El polinomio $p(x) = 0 + 0x + 0x^2 + ...$ *se llama polinomio cero. Mas generalmente todo polinomio* $p(x) = a + 0x + 0x + 0x^3 + ...$ *se dice polinomio constante.*

2.1.3. Igualdad de polinomios

Dos polinomios en x con coeficientes complejos son iguales o idénticos cuando tienen los mismos coeficientes. Es decir:

$$\text{Si } p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_ix_i \text{ y } q(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_ix^i \text{ son polinomios en } \mathbb{C}, \text{ entonces:}$$

$$p(x) = q(x) \Leftrightarrow a_i = b_i, \forall i = 0, 1, 2, ...$$

Así, por ejemplo, un polinomio es igual al polinomio cero cuando todos sus coeficientes son cero.

2.1.4. Grado de un polinomio

Si un polinomio $p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ es tal que, para $i = m$, $a_m \neq 0$ y $a_i = 0\ \forall i > m$, entonces diremos que el polinomio $p(x)$ tiene grado m.

Notación: $gr\, p(x) = m$.

Consecuencias

a) $grp(x) = m \Rightarrow p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_m x^m$ con $a_m \neq 0$.

b) El polinomio cero no tiene grado.

c) Los polinomios constantes no nulos tienen grado 0, ya que un polinomio constante no nulo tiene la forma:

$$p(x) = a + 0x + 0x^2 + ..,0x^n + ..., \text{ con } a \neq 0.$$

Ejemplo 2.2. *Dado los polinomios*

- $p(x) = x^2 + bx + c.$
- $q(x) = 1 + x - x^2 + x^3 - x^4 + 2x^5.$
- $t(x) = x^6 - x^7 + x^4 - x^5 + x^2 - x^3 + x - 1.$
- $s(x) = a + bx.$

se tiene:

- $p(x) = c + bx + 1x^2 + 0x^3 + 0x^4 + ...$
- $q(x) = 1 + 1x + (-1)x^2 + 1x^3 + (-1)x^4 + 2x^5 + 0x^6 + 0x^7 + ...$
- $t(x) = (-1) + 1x + 1x^2 + (-1)x^3 + 1x^4 + (-1)x^5 + 1x^6 + (-1)x^7 + 0x^8 + 0x^9 + ...$
- $s(x) = a + bx + 0x^2 + 0x^3 + ...$

luego:
$gr\, p(x) = 2, grq(x) = 5, grt(x) = 7;$
$gr\, s(x) = 1 \Leftrightarrow b \neq 0;$
$gr\, s(x) = 0 \Leftrightarrow a \neq 0 \wedge b = 0$
y $s(x)$ *no tiene grado si, y sólo si* $a = b = 0.$

2.2. Operatoria con polinomios

2.2.1. Suma de polinomios

Sean

$$p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...$$

$$q(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ...$$

dos polinomios en $\mathbb{C}[x]$. El polinomio suma $s(x) = p(x) + q(x)$ está dado por:

$$s(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) x^i$$

Ejemplo 2.3. *Sean* $p(x) = x^3 + 2x^2 - 1$*,* $q(x) = 3x^2 + x + 3$*, luego*

$$\begin{aligned} s(x) &= p(x) + q(x) \\ &= (x^3 + 2x^2 - 1) + (3x^2 + x + 3) \\ &= x^3 + 5x^2 + x + 2. \end{aligned}$$

Propiedades

(i) La suma de polinomios es asociativa, conmutativa, tiene por neutro el polinomio cero y $-p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-a_i) x^i$ es el inverso aditivo de $p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$.

(ii) Si $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios con coeficientes complejos, entonces:

$$gr(p(x) + q(x)) \leq \max\{grp(x), grq(x)\}.$$

Ejemplo 2.4. *Sea* $p(x) = x^3 + 2x^2 - 1$*,* $q(x) = 3x^2 + x + 3$*, entonces* $grp(x) = 3$*,* $grq(x) = 2$ *luego* $grs(x) \max(3, 2) = 3$*, por tanto* $gr\, s(x) = 3$.

2.2.2. Producto de polinomios

Sean

$$p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i, \ \mathrm{gr}\, p(x) = n \text{ y } q(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i, \ \mathrm{gr}\, q(x) = m$$

dos polinomios en $C[x]$. El producto de ellos está dado por:

$$p(x)q(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i,$$

donde:

$c_0 = a_0 b_0,$

$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0,$

$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0,$

$\vdots$

En general $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$, $0 \leq k \leq n+m$. En particular $c_{n+m} = a_n b_m$.

Ejemplo 2.5. *Sean*

$$\begin{array}{rclcc} p(x) & = & x^2 - x + 1 & \Rightarrow & a_0 = 1, a_1 = -1, a_2 = 1. \\ q(x) & = & 2x - 3 & \Rightarrow & b_0 = -3, b_1 = 2. \end{array}$$

Luego,

$$p(x)q(x) = s(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3,$$

donde:

$c_0 = a_0 b_0 = 1(-3) = -3.$

$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 = 1(2) + (-1)(-3) = 5.$

$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 1(0) + (-1)(2) + 1(-3) = -5.$

$c_3 = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0 = 1(0) + (-1)(1) + 1(2) + 0(-3) = 2,$

finalmente $s(x) = -3 + 5x - 5x^2 + 2x^3.$

Propiedades

i) El producto de polinomios es asociativo, conmutativo, tiene por neutro el polinomio constante 1 y solo los polinomios constantes no nulos tienen inverso multiplicativo. Además el producto es ditributivo con respecto a la suma.

ii) Si $p(x), q(x) \in \mathbb{C}[x]$, entonces:

$$\mathrm{gr}(p(x)q(x)) = \mathrm{gr}p(x) + \mathrm{gr}q(x),$$

2.3. Algoritmo de la división. División sintética. Teorema del resto

2.3.1. Algoritmo de la división

Teorema 2.1. *Dados $p(x), s(x) \in \mathbb{C}[x]$, siendo $s(x)$ polinomio no nulo, entonces existen dos polinomios únicos $q(x)$ y $r(x)$ (cuociente y resto) en $\mathbb{C}[x]$ tales que:*

i) $p(x) = s(x)q(x) + r(x)$

ii) Para $r(x)$ se cumple sólo una de las condiciones siguientes:

  a) $r(x)$ *es el polinomio cero.*

  b) $gr\, r(x) < gr s(x)$.

Observación 2.2. *En el algoritmo de la división podemos destacar los siguientes casos:*

a) Si $p(x)$ es el polinomio cero, entonces el cuociente y el resto son cero. Así tenemos

$$0 = s(x)0 + 0, p(x) = 0.$$

b) Si $grp(x) < grs(x)$, entonces el cuociente es el polinomio cero y el resto es el polinomio $p(x)$. Luego:

$$p(x) = s(x)0 + p(x), grp(x) < grs(x).$$

c) Si $r(x)$ es el polinomio cero, entonces

$$p(x) = s(x)q(x), r(x) = 0.$$

*En este caso $p(x)$ es un **múltiplo** de $s(x)$ o bien $s(x)$ es un **factor (o divisor)** de $p(x)$.*

d) Si $grs(x) = 1$, entonces el resto es un polinomio constante ya que el resto es el polinomio cero o bien su grado es 0. Luego:

$$p(x) = s(x)q(x) + c, grs(x) = 1.$$

Ejemplo 2.6. *Dados $p(x) = 2x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 5x + 1$ y $s(x) = x^2 + x - 1$. Aplique el algoritmo de la división para hallar el cuociente y el resto de la división de $p(x)$ por $s(x)$.*

Solución

$$\begin{array}{l}
2x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 5x + 1 \quad : \quad x^2 + x - 1 = 2x^2 - 7x + 12, \\
\underline{2x^4 + 2x^3 - 2x^2} \\
\quad -7x^3 + 5x^2 - 5x \\
\quad \underline{-7x^3 - 7x^2 + 7x} \\
\qquad 12x^2 - 12x + 1 \\
\qquad \underline{12x^2 + 12x - 12} \\
\qquad\quad -24x + 13
\end{array}$$

luego, el cuociente es $q(x) = 2x^2 - 7x + 12$ y el resto $r(x) = -24x + 13$. Se cumple que $p(x) = s(x)q(x) + r(x)$.

Observación 2.3. *Notemos que para la división los polinomios están escritos en orden decreciente de los exponentes de x.*

2.3.2. División sintética

Para dividir un polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, por el polinomio $x - c$, se puede proceder abreviadamente según el **método de la división sintética** que se explica a continuación:

1. Se escribe $p(x)$ en orden decreciente de las potencias de x:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n+1} + ... + a_1 x + a_0.$$

2. Se confecciona una tabla con 3 filas horizontales y $n+2$ columnas, donde $n =$gr$p(x)$.
3. En la primera fila se ubican los coeficientes de x^i, desde $i = n$ hasta $i = 0$. En el último lugar se ubica c.
4. En la 1^a columna, 3^a fila se copia el coeficiente a_n.
5. En la 2^a columna, 2^a fila se anota el producto de c por a_n.
6. En la 2^a columna, 3^a fila se anota el resultado de la suma de esta columna:$a_{n-1} + ca_n$.
7. En la 3^a columna, 2^a fila se anota el producto de c por $a_{n-1} + ca_n$.
8. En la 3^a columna, 3^a fila se anota el resultado de la suma de la columna.

Así se continua sucesivamente hasta completar $n+1$ columnas.
En la columna $n+1$, 3^a fila queda ubicado el resto $r(x)$ de la división de $p(x)$ por $x - c$.
Todo lo anterior se resume en el siguiente esquema:

a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_0	c
	$a_n c$	$a_{n-1}c + a_n c^2$			
a_n	$a_{n-1} + a_n c$	$a_{n-2} + a_{n-1}c + a_n c^2$	$\cdots$	$r(x)$	

Obtenemos:

$$p(x) = (x - c)[a_n x^{n-1} + (a_{n-1} + a_n c)x^{n-2} + (a_{n-2} + a_{n-1}c + a_n c^2)x^{n-3} + ...] + r(x)$$

donde (por el algoritmo de la división):

$$q(x) = a_n x^{n-1} + (a_{n-1} + a_n c)x^{n-2} + ...$$

es el cuociente y $r(x)$ es el resto, el cual es un polinomio constante (por la observación 2.2 *d*)).

Observación 2.4. *Este método es usado sólo para dividir por un polinomio de* 1^{er} *grado del tipo* $x - c$, $c \in \mathbb{C}$.

Ejemplo 2.7. *Dividir* $p(x) = 2x^4 - 5x^3 - 3x^2 - 4^x + 12$, *por* $s(x) = x - 3$, *utilizando división sintética*

Solución:

Como $p(x) = 2x^4 - 5x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ y $s(x) = x - 3$, por división sintética:

2	-5	-3	-4	12	3
	6	3	0	-12	
2	1	0	-4	0	

Por lo tanto:
$p(x) = (2x^3 + x^2 - 4)(x - 3)$ y resto del polinomio es $r(x) = 0$. Notemos que en este caso $s(x)$ es factor de $p(x)$

Ejemplo 2.8. *Dividir* $p(x) = x^3 - 3x - 2$ *por* $s(x) = x + 2$.

Solución

Como $p(x) = x^3 + 0x^2 + (-3)x + (-2)$ y $s(x) = x - (-2)$.
por división sintética:

1	0	-3	-2	-2
	-2	4	-2	
1	-2	1	-4	

Por lo tanto:

$$p(x) = (x^2 - 2x + 1)s(x) + (-4).$$

Es decir, el cuociente es $q(x) = x^2 - 2x + 1$ y el resto es el polinomio constante $r(x) = -4$.
Notemos que en este caso $r \neq 0$, luego $s(x)$ no es un factor de $p(x)$.

2.3.3. Evaluación de un polinomio. Teorema del resto

Definición 2.2. *Dado un polinomio* $p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ *en* $\mathbb{C}[x]$ *y un número* $b \in \mathbb{C}$, *entonces:*

$$p(b) = a_0 + a_1b + a_2b^2 + ... + a_nb^n$$

es un número complejo, llamado la evaluación del polinomio $p(x)$ *en* $x = b$.

Ejemplo 2.9. *Si* $p(x) = x^2 - 3x + 2$, *entonces*
$p(-1) = (-1)^2 - 3(-1) + 2 = 6 \neq 0$, $p(2) = 4 - 6 + 2 = 0$.

Estos ejemplos ilustran el siguiente teorema.

Teorema 2.2. *(Teorema del Resto). Si* $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ *y* $b \in \mathbb{C}$, *entonces el resto de la división de* $p(x)$ *por* $x - b$ *es* $p(b)$. *Esdecir:*

$$p(x) = q(x)(x - b) + p(b)$$

2.4. Raíces de un polinomio. Factorización de un polinomio

2.4.1. Raíz de un polinomio

Definición 2.3. *Sean $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ y $b \in \mathbb{C}$. Se dice que b es raíz de $p(x)$ si $p(b) = 0$.*

Consecuencia:

Por el Teorema del Resto, se tiene:

$$p(x) = (x - b)q(x) + p(b)$$

luego:

$$b \text{ es raíz de } p(x) \Leftrightarrow p(x) = (x - b)q(x)$$

es decir:

$$b \text{ es raíz de } p(x) \Leftrightarrow x - b \text{ es un factor de } p(x).$$

Ejemplo 2.10. *En el ejemplo anterior $x = 2$ es raiz de $p(x) = x^2 - 3x + 2$, pues $p(2) = 0$, o bien $p(x) = (x - 2)q(x)$.*

2.4.2. Factorización de un polinomio. Teorema fundamental del álgebra

Definición 2.4. *Sea K uno de los conjuntos: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Un polinomio es **fatorizable o reducible en** $K[x]$ si, y sólo si se puede expresar a lo menos como un producto de dos polinomios de grado mayor o igual a 1 en $K[x]$.*

Consecuencia

$$\text{gr}p(x) < 2 \vee p(x) = 0 \Rightarrow p(x) \text{ es irreducible o no factorizable.}$$

Ejemplo 2.11. *a) Se tiene que $p(x) = 2x^4 - 5x^3 - 3x^2 - 5x + 1$ es un polinomio factorizable en $\mathbb{C}[x]$, pues $p(x) = q(x)(x - i)$ donde $q(x) \in \mathbb{C}[x]$ y $(x - i) \in \mathbb{C}[x]$.*

b) Si $p(x) = x^2 + 1$ y $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, $p(x)$ no es factorizable en $\mathbb{R}[x]$. Sin embargo si consideramos $p(x) \in \mathbb{C}[x]$, resulta que $p(x)$ es factorizable en $C[x]$, ya que

$$p(x) = (x - i)(x + i).$$

Observación 2.5. *Más generalmente resulta que todo polinomio en $\mathbb{C}[x]$ de grado ≥ 2 es siempre factorizable.*

Teorema 2.3. *(Teorema Fundamental del Álgebra) Si $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ es un polinomio no constante ($gr\,p(x) \geq 1$), entonces $p(x)$ tiene raíz en $\mathbb{C}$.*

Observación 2.6.

i) La demostración de este teorema es difícil y se necesita conocimientos superiores.

ii) Utilizando las raíces de un polinomio podemos llegar a su completa factorización, de la siguiente manera:

Si $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ y b_1 es una raíz compleja de $p(x)$ entonces $p(x) = q_1(x)(x - b_1)$ donde $q_1(x) \in \mathbb{C}[x]$. Ahora si b_2 es raíz de $q_1(x)$ resulta que $q_1(x) = q_2(x)(x - b_2)$, luego:

$$p(x) = q_2(x)(x - b_2)(x - b_1).$$

Siguiendo este procedimiento se llega a factorizar $p(x)$ completamente en factores de la forma $(x - b)$, obteniéndose de este modo todas las raíces de $p(x)$.

En resumen:

Teorema 2.4. *(De la factorización) Si $p(x) \in \mathbb{C}[x] - \{0\}$ y $grp(x) = n > 0$, entonces $p(x)$ es factorizable en un producto de n factores de la forma $x - b$. Es decir:*

$$p(x) = b_0(x - b_1)(x - b_2)...(x - b_n)$$

donde $b_1, b_2, ...b_n$ son las raíces de $p(x)$ y b_0 es el coeficiente de x^n.

Ejemplo 2.12. *Consideremos $p(x) = 2x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 5x + 1$; con $p(i) = 0$, es decir $p(x) = (x - i)q(x)$ donde:*

$$q(x) = 2x^3 + (-5 + 2i)x^2 + (1 - 5i)x + i$$

Si dividimos $q(x)$ por $x + i$ resulta:

$$q(x) = (x + i)q_1(x)$$

donde

$$q_1(x) = 2x^2 - 5x + 1.$$

Ahora resolviendo $2x^2 - 5x + 1 = 0$, se tiene que $\frac{5+\sqrt{17}}{4}, \frac{5-\sqrt{17}}{4}$ son raíces de $q_1(x)$. Resumiendo:

$$p(x) = 2(x - i)(x + i)(x - \frac{5 + \sqrt{17}}{4})(x - \frac{5 - \sqrt{17}}{4})$$

donde 2 es el coeficiente de x^4 y $\pm i, \frac{5\pm\sqrt{17}}{4}$ son las raices de $p(x)$, todas distintas entre sí.

2.4.3. Algunos criterios para raíces

Los siguientes criterios nos sirven para obtener raíces de un polinomio dado.

1. **Criterio de las raíces complejas de un polinomio real.**

Si $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ y b es raíz compleja de $p(x)$, entonces el complejo conjugado de b es también una raíz de $p(x)$.

Ejemplo 2.13. *Teniendo en cuenta el ejemplo 2.12, como $p(x)$ tiene coeficientes reales y además $b = i$ es raíz de $p(x)$, resulta claro, por el criterio de las raíces complejas que $\overline{b} = \overline{i} = -i$ también lo es.*

2. **Criterio de las raíces irracionales de un un polinomio con coeficientes racionales.**

Si $p(x) \in \mathbb{Q}$ y $m + n\sqrt{k}$ es raíz de $p(x)$ donde $m, n, k \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{k} \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$, entonces $m - n\sqrt{k}$ también es raíz de $p(x)$.

Ejemplo 2.14. *Considerando ejemplo 2.12, resulta que $p(x) \in \mathbb{Q}$, $b = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{17}$ es raíz de $p(x)$, al igual que $\frac{5}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{17}$ también lo es por el criterio de las raíces irracionales.*

3. **Criterio de las raíces racionales de un polinomio con coeficientes enteros.**

Si $p(x) \in \mathbb{Z}[x], p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ de grado n, $a_0 \neq 0$ y el número racional $\frac{u}{v}$ raíz de $p(x)$, entonces u es un factor de a_0 y v es factor de a_n.

Ejemplo 2.15. *Analice y determine las raíces de $p(x) = 3x^3 - 2x^2 - 7x - 2 \in \mathbb{Z}[x]$.*

Solución

Según el criterio de las raíces racionales, si $\frac{u}{v}$ es raíz de $p(x)$, entonces u es factor de -2, y v es factor de 3. Luego

$$u \in \{1, -1, 2, -2\},$$

$$v \in \{1, -1, 3, -3\}$$

y así, las posibles raíces racionales de $p(x)$ están dadas por:

$$\frac{u}{v} \in \{1, -1, 2, -2, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\}.$$

Calculando $p(\frac{u}{v})$ para cada uno de estos valores se ve que -1 es raíz de $p(x)$, ya que $p(-1) = 0$. Aplicando el Teorema de la factorización:

$$p(x) = (x + 1)(3x^2 - 5x - 2).$$

Para obtener las dos raíces restantes resolvemos la ecuación de 2^o grado

$$3x^2 - 5x - 2 = 0.$$

Logramos finalmente la factorización total de $p(x)$:

$$p(x) = 3(x + \frac{1}{3})(x - 2)(x + 1)$$

donde se ve claramente que $-\frac{1}{3}$, 2, -1 son raíces del polinomio dado.

4. **Regla de los signos de Descartes**

Sea $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ y $p(0) \neq 0$. Si escribimos $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ y observamos los signos sucesivos de los $a_i \neq 0, i = n, n-1, ..., 1, 0$, entonces:

a) El número de raíces positivas de $p(x)$ es igual al número de variaciones de signos en coeficientes sucesivos de $p(x)$, o bien este número de variaciones disminuído en un entero par.

b) El número de raíces negativas de $p(x)$ es igual al número de variaciones de signo en coeficientes sucesivos de $p(-x)$ o bien este número de variaciones disminuído en un entero par.

Ejemplo 2.16. *Por medio de la regla de los signos de Descartes, hallar toda la información posible acerca de la naturaleza de las raíces de*

$$p(x) = x^5 + 3x^4 + 2x^3 - x^2 - 3x - 2.$$

Solución

Como $p(0) \neq 0$ y $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, podemos usar la regla de los signos de Descartes. La sucesión de coeficientes $\neq 0$ de $p(x)$ es:

$$1, 3, 2, -1, -3, -2,$$

donde sólo de 2 a -1 hay cambio de signo. Luego en este caso hay solo una variación de signo.

Para

$$p(-x) = -x^5 + 3x^4 - 2x^3 - x^2 + 3x - 2$$

los coeficientes no nulos son:

$$-1, 3, -2, -1, 3, -2.$$

Luego hay 4 variaciones de signo.

Por lo tanto:

Número de raíces positivas : 1
Número de raíces negativas : 4, 2 o bien 0

Como $p(x)$ tiene, según el teorema de factorización, a lo más 5 raíces distintas en $\mathbb{C}$, se presenta la siguiente situación:

Raíces positivas	Raíces negativas	Raíces en $\mathbb{C} - \mathbb{R}$
1	4	0
1	2	2
1	0	4

5. **Raíces Múltiples y Regla de la Derivada**

Definición 2.5. *Sea $p(x)$ un polinomio real. b es raíz de multiplicidad m de $p(x) \Leftrightarrow (x-b)^m$ es divisor de $p(x)$ y $(x-b)^k$ no es divisor de $p(x), \forall k > m$.*

Ejemplo 2.17. *Si $p(x) = 3(x-2)^3(x+1)$, se tiene que $b_1 = 2$ es raíz de multiplicidad 3 y $b_2 = -1$ es raíz de multiplicidad 1 (o raiz simple).*

Teorema 2.5. *(Regla de la derivada) Si $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ y $b \in \mathbb{R}$, entonces: b es raíz de multiplicidad m de $p(x) \Leftrightarrow p(b) = p'(b) = ... = p^{(m-1)}(b) = 0$ y $p^{(m)}(b) \neq 0$.*

Ejemplo 2.18. *Sea $p(x) = x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 13x^2 + 12x - 4$. Encontrar las raíces racionales de $p(x)$ y la multiplicidad de cada una.*

Solución

$$\text{Como } \tfrac{u}{v} \in \mathbb{Q}, \tfrac{u}{v} \text{ es raíz de } p(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} u \text{ es factor de } 4, \\ v \text{ es factor de } 1, \end{cases}$$

se tiene por el criterio de las raíces racionales que

$$\frac{u}{v} = \pm 1, \pm 4, \pm 2.$$

Evaluando el polinomio en cada valor posible de $\frac{u}{v}$, tenemos que solo $\frac{u}{v} = 1$ es raíz.
Ahora utilizado la regla de la derivada:

$$\begin{aligned} & p'(x) = 5x^4 - 12x^3 + 21x^2 - 26x + 12 \\ \therefore \quad & p'(1) = 0 \\ \therefore \quad & p''(x) = 20x^3 - 36x^2 + 42x - 26 \\ \therefore \quad & p''(1) = 0 \\ \therefore \quad & p'''(x) = 60x^2 - 72x + 42 \\ \therefore \quad & p'''(1) \neq 0, \end{aligned}$$

obtenemos que $b = 1$ es raíz de multiplicidad 3 de $p(x)$.

Observación 2.7. *En el ejemplo las otras raíces de $p(x)$ son $\pm 2i$, de este modo:*

$$p(x) = (x-1)^3(x+2i)(x-2i).$$

Ejercicios propuestos

1. Averigue si existe un valor de $k \in \mathbb{R}$ para el cual los polinomiso $p(x)$ y $q(x)$ sean iguales.

   a) $p(x) = 2x^3 - 3x + (k+1)x^4 - 3$
      $q(x) = (k-1)x^2 - 3x + (k+1)x^3 + (k+1)x^4 + (k-1)x^5 - 3$

   b) $p(x) = kx^4 - (2k+1)x + k$
      $q(x) = (2k+1)x^2 + kx^4 - 2x^2 + k$

2. En el ejercicio 1 para el caso que exista $k \in \mathbb{R}$ ¿qué grado tienen $p(x)$ y $q(x)$?

3. Use la división sintética y el teorema del resto para hallar los valores de $p(x_0)$ donde:

   a) $p(x) = 2x^3 - 2x^2 + 5x - 7$, $x_0 = 2$.
   b) $p(x) = 9x^4 - 3x^2 + 2x - 1$, $x_0 = \frac{1}{3}$.

4. Determine en cada caso si el binomio dado es o no un factor de $p(x)$.

   a) $x - 1$; $p(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 1$.
   a) $x - 5$; $p(x) = x^4 - 5x^3 - x + 5$.

5. Utilice el teorema del resto para hallar $k \in \mathbb{R}$ de modo que $p(x) = 3x^3 - 2x^2 + kx - 8$ sea divisible por $x - 2$.

6. Encuentre el valor de k para que al dividir $4x^3 + kx^2 - 2x + 5$ por $x - 1$, el resto sea 5.

7. Determine los valores de a y b de modo que $x + 1$ y $x + 2$ sean factores del polinomio $x^4 + ax^3 + bx - 2$.

8. ¿Para qué valores a y b, 2 y -3 son raíces de la ecuación $x^4 + x^3 + ax^2 + bx + 30 = 0$?

9. Encuentre todos los valores de k tales que $p(x) = kx^3 + x^2 + k^2x + 3k^2 + 11$ sea divisible por $x + 2$.

10. Demuestre que $x - c$ no es un factor de $p(x)$ para cualquier valor real de c, si se tiene:

    a) $p(x) = 3x^4 + x^2 + 5$
    b) $p(x) = -x^4 - 3x^2 - 2$

11. Construya un polinomio real $p(x)$ de grado 3 que posea los ceros o raíces indicadas y satisfaga la dondición dada:

    a) $-1, 2, 3$; $p(-2) = 80$
    b) $-2i, 3$; $p(1) = 20$
    c) $3i, 4$; $p(-1) = 50$

12. Determine un polinomio $p(x)$ de sexto grado tal que 0 y 3 sean ceros o raíces de multiplicidad 3 y $p(-2) = -24$.

13. En cada uno de los ejercicios demuestre el enunciado dado, usando el teorema del residuo, siendo n un número entero positivo.

    a) $x^n - a^n$ es divisible por $x + a$, si n es par.
    b) $x^n + a^n$ es divisible por $x + a$, si n es impar.
    c) $x^n + a^n$ no es divisible por $x + a$, si n es par.
    d) $x^n + a^n$ no es divisible por $x - a$, si n es par.

14. Use la regla de Descartes para terminar el número de soluciones reales positivas y negativas de las siguientes ecuaciones:

    a) $4x^3 - 6x^2 + x - 3 = 0$
    b) $3x^4 + 2x^3 - 4x + 2 = 0$
    c) $x^5 + 4x^4 + 3x^3 - 4x + 2 = 0$

15. Obtenga el conjunto de soluciones de la ecuación dada:

    a) $2x^4 + 6x^3 + 33x^2 - 36x + 20 = 0$, si $-2 - 4i$ es una raíz.
    b) $3x^4 + 4x^3 + 9x^2 - 6x + 4 = 0$, si $-1 + \sqrt{3}i$ es una raíz.
    c) $x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 9x + 6 = 0$ si $\sqrt{3}$ es una raíz.

16. Factorizar totalmente los polinomios $p(x)$, siendo:

    a) $p(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$.
    b) $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3$.
    c) $p(x) = x^4 - 3x^2 - 4$.

17. Se construye una caja sin tapa a partir de un cartón de 20 por 30 pulgadas, cortando cuadrados idénticos de área x^2 en cada esquina y doblando hacia arriba los lados.

    a) Demuestre que es posible obtener dos cajas distintas con volumen $1000[plg]^3$.
    b) ¿Cuál de ellas tiene menor área?