Ensayo para la Segunda Prueba de Álgebra II, segundo semestre 2019

Mercedes Fernández y Eliseo Martínez

12 de marzo del 2020

1. Primer item

Dado $p(x) = x^5 - 8x^4 + \mathbf{a}x^3 - 14x^2 - 20x + 24$

1. Sabiendo que $x = 2$ es raíz de $p(x)$, halle el valor de **a**.
2. Aplicando el criterio de la derivada demuestre que la raíz $x = 2$ tiene multiplicidad 3 (esto es, se repite tres veces como raíz).
3. Halle las dos raíces faltantes.
4. Factorizar totalmente $p(x)$.

1.1. Solución del primer item

1. Tenemos que $p(2) = 0$, esto es evaluando al reemplazar $x = 2$ obtenemos $p(2) = 8\mathbf{a} - 168 = 0$, y despejando nos queda que $\mathbf{a} = 21$. De modo que $p(x) = x^5 - 8x^4 + 21x^3 - 14x^2 - 20x + 24$
2. la primera derivada de $p(x)$ es

$$\frac{dp(x)}{dx} = 5x^4 - 32x^3 + 63x^2 - 20x - 20 = f'(x)$$

y si evaluamos esta derivada en $x = 2$ obtenemos que$f'(2) = 0$ Nuevamente derivamos la funcin $f'(x)$ y obtenemos

$$f''(x) = 20x^3 - 96x^2 + 126x - 20$$

y evaluando obtenemos que $f''(2) = 0$, nuevamente. De modo que $f(2) = f'(2) = f''(2) = 0$. Lo que significa que $x = 2$ tiene a lo menos multiplicidad 3. Si obtenemos la tercera derivada, esto es

$$f'''(x) = 60x^2 - 192x + 126$$

observamos que en este caso $f'''(2) = -18 \neq 0$. En definitiva $x = 2$ es una raíz con multiplicidad 3 para $f(x)$.

3. Por lo anterior, sabemos que $(x-3)^3$ divide a $f(x)$, y como $(x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ tenemos que

$$\frac{x^5 - 48x^4 + 21x^3 - 14x^2 - 20x + 24}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} = x^2 - 2x - 3$$

Y las raíces de esta función cuadrática son sencillas de calcular, estas son $x = -1$ y $x = 3$ y además $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$

4. En consecuencia La factorización de $f(x)$ es $(x-2)^3(x+1)(x-3))$

2. Segundo item

Determine la convergencia o divergencia de las series

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2}{(3n+2)(3n+3)}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+5)!}{2^n n^2 n!}$

2.1. Respuestas al segundo item

a) Recuerde que para que una serie $\sum_n^{\infty} a_n$ converja debe necesariamente ocurrir (aunque no suficiente[1]) que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Y en nuestro caso tenemos que

$$a_n = \frac{3n^2}{(3n+2)(3n+3)} = \frac{3n^2}{9n^2 + 15n + 6}$$

y es claro que el límite de a_n, cuando $n \to \infty$, es $\frac{3}{9} = \frac{1}{3} \neq 0$ De modo que nuestra serie diverge.

b) En este caso

$$a_n = \frac{(n+5)!}{2^n n^2 n!}$$

y si utilizamos el criterio del cociente tenemos que (despues de alguna manipulación algebráica)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2(n+6)}{2(n+1)^3}$$

Y claramente se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} < 1$$

Y en consecuencia la serie converge.

[1]Esto quiere decir que si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ entonces la serie $\sum a_n$ diverge

3. Tercer item

Dada la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^n}{2^n (3n-1)}$

a) Determinar intervalo de convergencia absoluta.

b) Determinar intervalo de convergencia.

c) Determinar intervalo de divergencia.

3.1. Respuesta al tercer item

Recuerde que una serie de potencia en torno a un punto a es de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

Lo fundamental es encontrar el radio de convergecia R que se obtiene mediante

$$lim_{n\to\infty} |\frac{c_{n+1}}{c_n}| = l$$

de modo $R = \frac{1}{l}$. Y entonces la serie convege absolutamente en el intervalo $(a-R, a+R)$, luego estudiar si la serie converge o no para los calores extremos $a \pm R$. En nuestro caso se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{c_{n+1}}{c_n}| = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{3n-1}{3n+2} = \frac{1}{2}$$

donde

$$c_n = \frac{(-1)^n (x-1)^n}{2^n (3n-1)}$$

(Nota: Realice usted los cálculos)
De modo que el intervalo de la convergencia absoluta es $(a-R, a+R) = (-1, 3)$, puesto que $a = 1$ y $R = 2$. Como no tenemos información de los extremos, hacemos un análisis separado. Para $x = -1$ nos queda la serie

$$\sum \frac{1}{3n-1}$$

que es divergente compare con la serie $\sum \frac{1}{n}$ (fundamente)
Para la serie obtenida al hacer $x = 3$ nos queda

$$\sum \frac{(-1)^n}{3n-1}$$

y esta serie es alternante *muy parecida* a la serie $\sum \frac{(-1)^n}{n}$, y esta es convergente. De modo que utilizando el criterio de DAlambert se concluye que nuestra serie es convergente. De modo que la convergencia ocurre en el intervalo $(-1, 3]$. Y fuera de el la serie de potencias diverge.