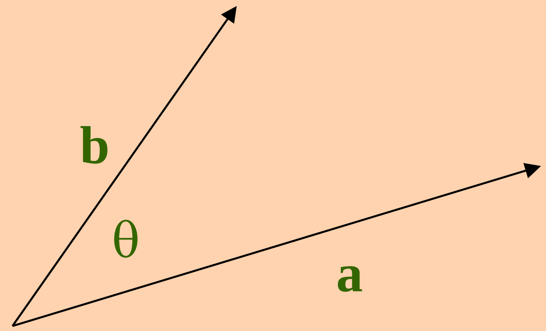
El producto escalar o producto punto

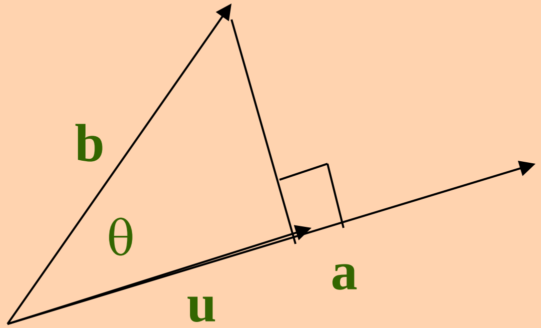


$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$$

donde θ es el ángulo entre a y b tal que

$$0 \le \theta \le \pi$$

Interpretación geométrica

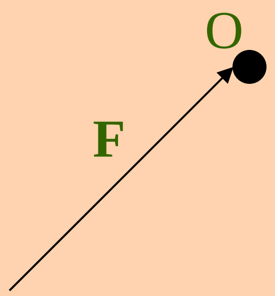


$$|\mathbf{u}| = |\mathbf{b}|\cos\theta$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{b} = |\boldsymbol{a}||\mathbf{b}|\cos\theta = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{u}|$$

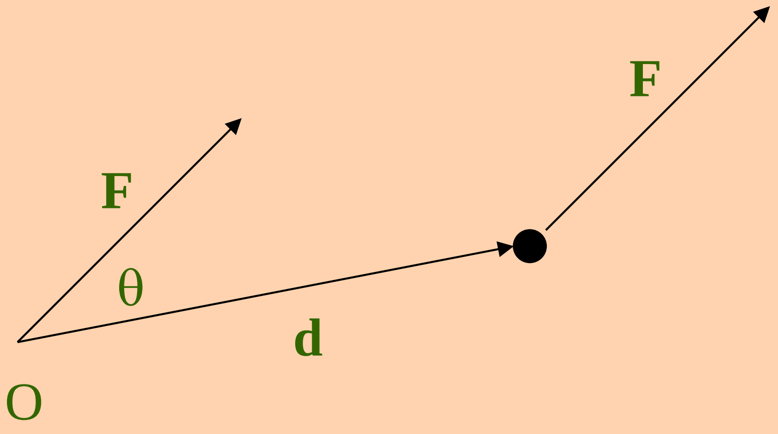
Este producto punto representa la magnitud o norma del vector que resulta de la proyección de **b** sobre **a** multiplicado por la magnitud de **a**

Una interpretación física del producto punto



Punto de aplicación de la fuerza ubicada en la posición O

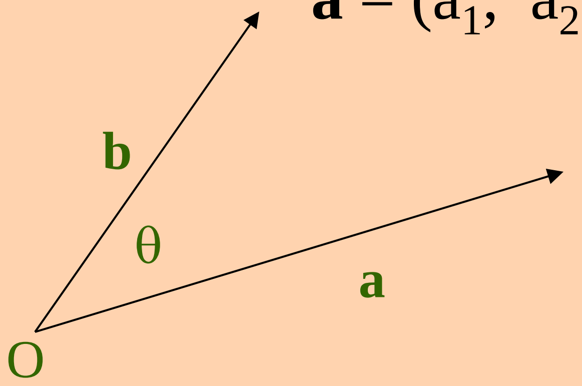
Si en virtud de la fuerza el punto se ha desplazado a un lugar descrito por el vector **d** (con la dirección indicada por el ángulo θ)



Entonces el trabajo realizado por la fuerza es justamente

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{d} = |\mathbf{F}||\mathbf{d}|\cos\theta$$

Una forma alternativa de definir el producto punto



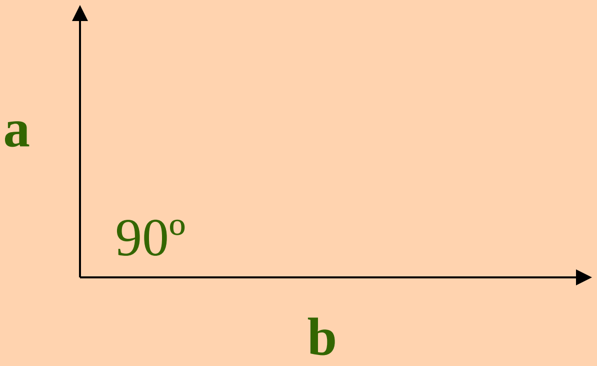
$\mathbf{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$

$\mathbf{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$

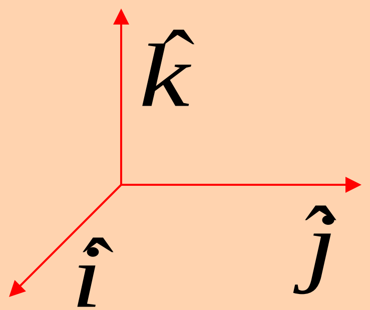
$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Notemos que $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}$

El producto punto caracteriza la perpendicularidad de dos vectores



$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos 90^{o} = 0$$



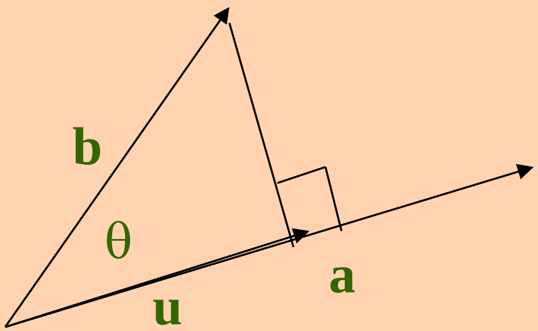
$$\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = 0$$

Y puesto que cos 0 = 1, entonces

$$\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$$

Propiedades del producto punto

Habíamos dicho que, esencialmente, el producto punto entre dos ventores es simplemente la magnitud de la proyección de un vector sobre el otro, multiplicada por la magnitud del vector sobre el que se proyecta.



$$|\mathbf{u}| = |\mathbf{b}|\cos\theta$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{b} = |\boldsymbol{a}||\mathbf{b}|\cos\theta = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{u}|$$

Este es el vector proyección de **b** sobre **a**

Magnitud del vector sobre el cual se proyecta