La función cuadrática: primera parte

Eliseo Martínez

24 de abril de 2025

Abstract

Se entrega un resumen de las propiedades de la función cuadrática $y = x^2$, y se muestra que la función $y = (x-a)^2 + b$ es esencialmente la misma solo que se han hecho una traslación de su vértice $(0,0)$ al punto (a,b) para formar $y = (x-a)^2 + b$. Y la segunda operación resulta de la función $y = kx^2$, y su efecto según sea k positivo o negativo, para decantar finalmente la parábola en su forma *agradable*, esto es

$$y = k(x-a)^2 + b$$

donde el estudiante deberá dominar el significado de estos tres parámetros.

Función cuadrática y sus traslaciones

1. La parábola básica: $y = x^2$

Esta es la forma más simple de una parábola. Tiene su vértice en el origen, es simétrica respecto al eje y y abre hacia arriba.

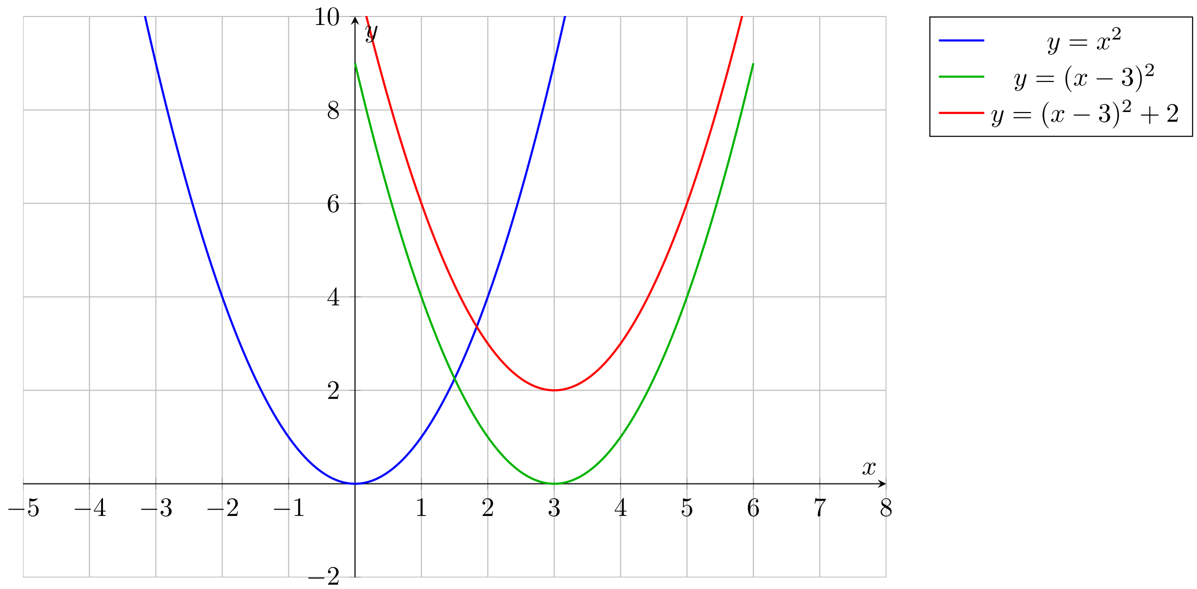
2. Traslación horizontal: $y = (x-3)^2$

Esta función representa una parábola con el mismo tamaño y forma que $y = x^2$, pero trasladada 3 unidades hacia la derecha. Su vértice está en $(3,0)$.

3. Traslación vertical: $y = (x-3)^2 + 2$

Ahora, la parábola se ha desplazado además 2 unidades hacia arriba. Su vértice está en $(3,2)$.

Gráfica comparativa



Otras traslaciones de la parábola

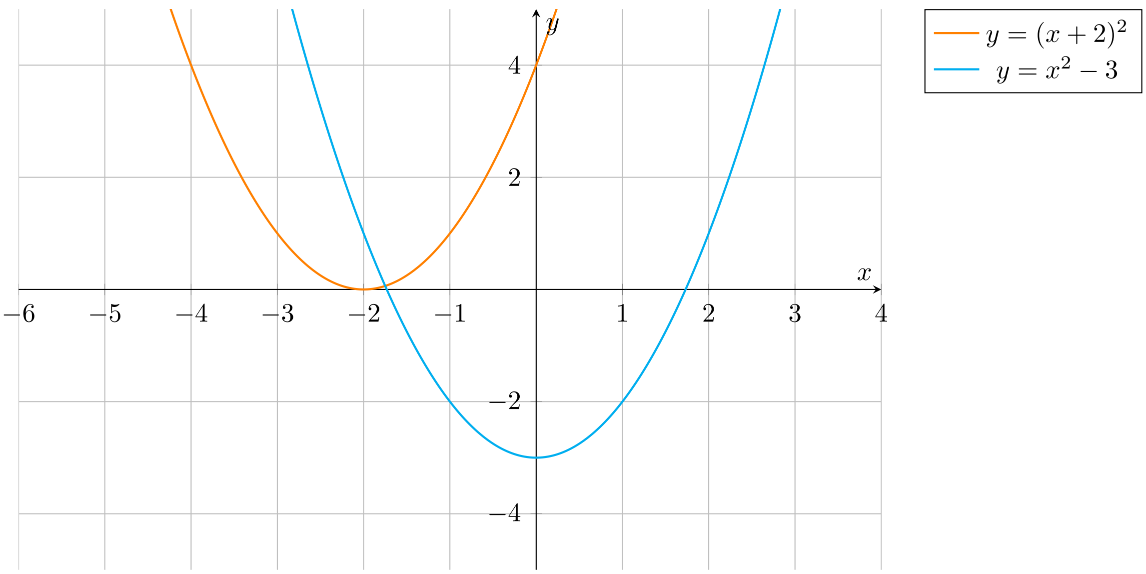
1. Traslación horizontal hacia la izquierda: $y = (x + 2)^2$

Aquí la parábola se traslada 2 unidades hacia la izquierda. Su vértice está en $(-2, 0)$. La forma no cambia, sólo su posición.

2. Traslación vertical hacia abajo: $y = x^2 - 3$

Ahora la parábola se ha desplazado 3 unidades hacia abajo. El vértice está en $(0, -3)$.

Gráfica comparativa



Efecto del coeficiente k en la parábola $y = kx^2$

1. Parábola base: $y = x^2$

Es la parábola de referencia. Tiene su vértice en el origen y una forma estándar.

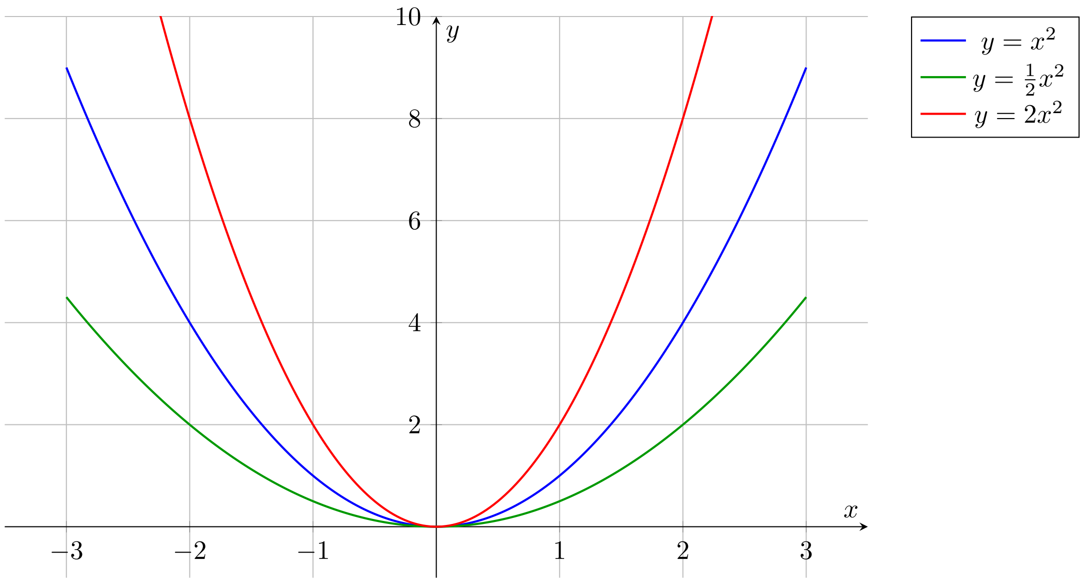
2. Parábola con $0 < k < 1$: $y = \frac{1}{2}x^2$

Es más ancha que la parábola base. El crecimiento de y es más lento respecto a x.

3. Parábola con $k > 1$: $y = 2x^2$

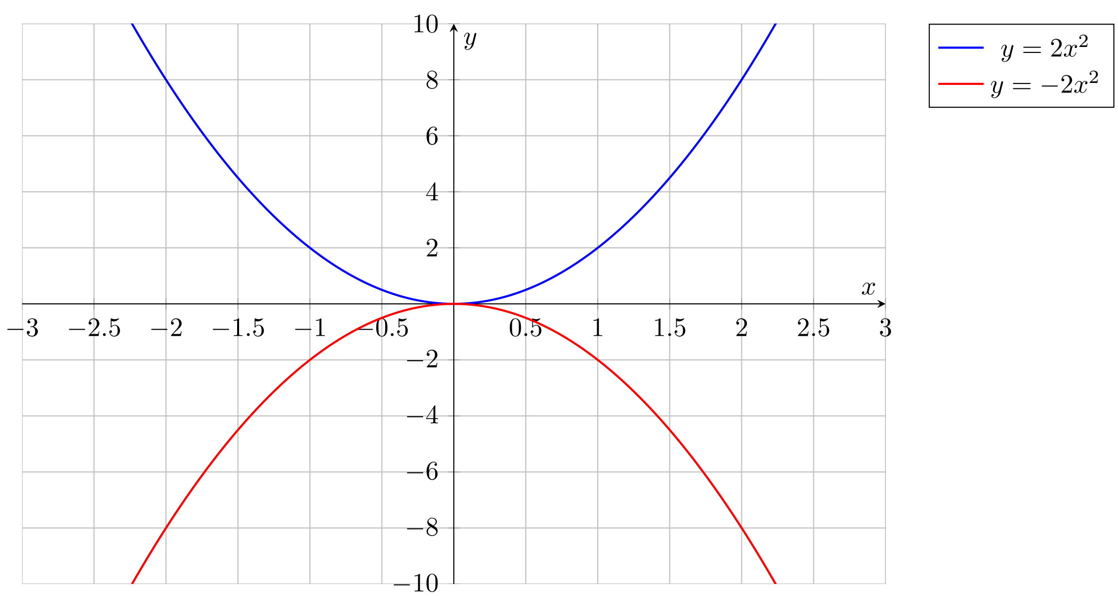
Es más estrecha. El crecimiento de y es más rápido al alejarse del eje x.

Gráfica comparativa



Simetría respecto del eje x: $y = kx^2$ y $y = -kx^2$

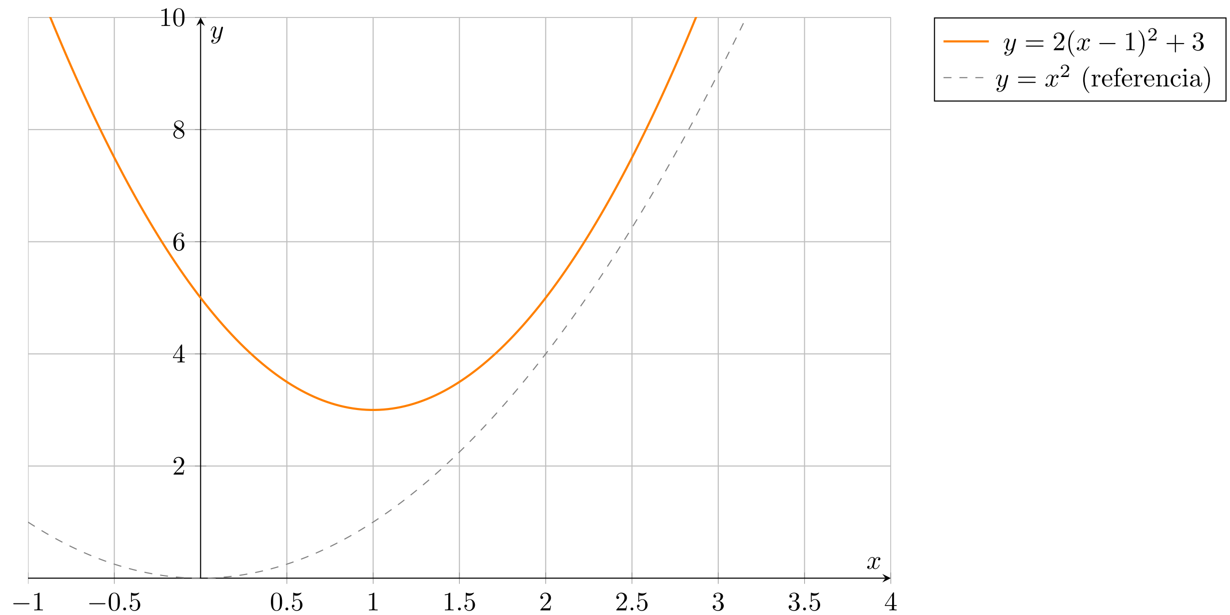
Ejemplo con $k = 2$:



Ambas parábolas tienen el mismo vértice en $(0, 0)$, pero se abren en direcciones opuestas.

Forma general de la parábola: $y = k(x-a)^2 + b$

Ejemplo: $y = 2(x-1)^2 + 3$



Esta parábola tiene vértice en $(1, 3)$ y se abre hacia arriba, con coeficiente $k = 2$.

1 Guía de Ejercicios: Función Cuadrática

Objetivos

- Comprender la forma general de la parábola $y = k(x-a)^2 + b$.
- Analizar el efecto del coeficiente k en la apertura de la parábola.
- Interpretar las traslaciones horizontales y verticales.

I. Parábola base

1. Grafique la función $y = x^2$ en un sistema de coordenadas.
2. Complete la siguiente tabla de valores para $y = x^2$:

x	$y = x^2$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

II. Efecto del coeficiente k

3. Grafique en el mismo plano las funciones:
   - $y = x^2$
   - $y = \frac{1}{2}x^2$
   - $y = 2x^2$
4. ¿Cuál parábola es más ancha? ¿Cuál es más estrecha?
5. ¿Qué ocurre si el coeficiente k es negativo? Grafique:
   - $y = -x^2$
   - $y = -2x^2$

III. Traslaciones

6. Grafique las funciones:
   - $y = (x-2)^2$
   - $y = (x+3)^2$
7. ¿Hacia qué dirección se traslada el vértice en cada caso?
8. Ahora grafique:
   - $y = (x-1)^2 + 2$
   - $y = (x+2)^2 - 3$
9. Identifique el vértice de cada parábola y el sentido de las traslaciones.

IV. Forma general $y = k(x-a)^2 + b$

10. Escriba la ecuación de una parábola que:
    - Tenga vértice en $(2, 5)$ y abra hacia abajo.
    - Tenga vértice en $(-1, -3)$ y abra hacia arriba.
11. Grafique ambas funciones en un mismo plano cartesiano.

Reflexión final (responda con palabras)

- ¿Cómo influye el valor de k en la forma de la parábola?
- ¿Qué efecto tiene el signo de k?
- ¿Qué papel cumplen los valores a y b en la ecuación?