Funciones más frecuentes para los estudiantes de ingeniería: la función cuadrática.

Eliseo Martínez Herrera; Douglas Fuenteseca

Agosto del 2015

Abstract

Se debe entregar, a juicio de los autores, una serie de funciones útiles que deberían incorporarse a un estándar de exigencia al estudiante de ingeniería al final de un primer curso de cálculo diferencial. Cada función se debe acompañar con el modelo matemático para el cual es útil. Presentamos a modo de ejemplo la parábola o función cuadrática en su forma estándar, y alejada de la descontextualización con la que a menudo se presenta..

1 Reconocer más que graficar

Los antiguos cursos de cálculo, en la aplicación de la derivada, obligaban un exhaustivo análicis de una determinada función con el cálculo de sus máximos, mínimos, puntos de inflexión, tipo de concavidad o convexidad, para en definitiva hacer un "esbozo" de la curva.

El "esbozo" de la curva como justificación para verificar si el estudiante sabe las "aplicaciones de la derivada" puede tener su fundamento, pero lo que si es cierto que ese no es, evidentemente, el estudio o análisis de alguna función que se trate como soprte a un determinado modelo de las ciencias. Nadie, en forma seria, esboza una función para sacar conclusiones. En estricto rigor se dibuja la función con toda la precisión de un software matemático y de ahí emergen los análisis y las propiedades de ella y de sus significado.

Por otro lado, gastamos gran tiempo de explicar el concepto de función inyectiva y epiyectiva, para posteriormente no aplicarla en el core del cálculo diferencial, como es la derivada. En efecto, toda función que tiene máximo o mínimo no es inyectiva, toda función que en un determinado dominio su derivada es positiva es una función creciente en tal dominio y por ende es inyectiva. Dicho de otra forma, a nuestro modo de ver, estas propiedades de inyectividad y epiyectividad no son tratadas en forma seria o consecuente con el desarrollo del cálculo. Y en cualquier caso deberían ser tratadas cuando el alumno ya tiene claro el significado de la derivada.

De otra forma este artículo trata derechamente de usar la función como modelo matemático, bajo el contexto històrico para el cual nació la función: para modelar. Esto es, como ayuda para explicar los fenómenos científicos.

2 La función cuadrática

En el cálculo del área de un cuadrado, en el cálculo del área de una circunferencia, en el movimiento de la caída libre de un objeto, en el cálculo de errores mediante la distancia euclideana, en los paradigmas de funciones simétricas, aparece esta sencilla función $x \to x^2$. Esto es que a cada número real x le asociamos el valor numérico de x^2.

2.1 Ejemplos de (uso de) funciones cuadráticas

2.1.1 El área de un cuadrado de lado x

Sea un cuadrado de lado x, con $x > 0$, entonces el área A de ese cuadrado está dado por $A = x^2$. Y puesto que siempre el área dependerá del valor de su lado, utilizamos la notación

$$A(x) = x^2$$

Notemos que esta función, por su esencia de calcular el área de un cuadrado de lado x, se tiene que su dominio de definición son todos los reales positivos.Y además podemos ver que si el lado x es pequeño, esto es menor que la unidad, entonces (numericamente) se tiene que $x^2 < x < 1$, y por otro lado si x es mayor que la unidad entonces $x^2 > x > 1$.

La pregunta que surge es: ¿en qué fenómenos o procesos se puede utilizar la función cuadrática para valores de x tanto positivos como negativos?

2.1.2 El valor absoluto de un número

Muy a menudo los profesores definen el valor absoluto de un número mediante

$$|x| = \begin{cases} x \;\; si \;\; x \geq 0 \\ -x \;\; si \; x < 0 \end{cases}$$

Optaremos por la definición correcta y utilizaremos la función cuadrática. El valor absoluto o módulo de un número real (sea positivo o negativo) es simplemente la "distancia" de ese número al cero. De otra forma la "distancia" del número -3 al número 0 es 3, y la distancia del número 3 también es 3. De modo que hacemos

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

entendiendo que la raíz cuadrada de un número está definida solamente para los números no negativos, y además la raíz cuadrada de un número siempre es no negativa.

Podemos notar entonces que esta distancia utiliza a la función cuadrática, y además en este caso tiene sentido el obtener el cuadrado de un número negativo.

2.2 Los "movimientos" de la función cuadrática.

A la función $x \to x^2$, le aplicamos la función $x^2 \to k \cdot x^2$, con $k \neq 0$, con esto conseguimos una suerte de amplificación o disminución con concavidad hacia arriba o hacia abajo, conforme el signo del número k. Luego podemos hacer una traslación horizontal "moviéndonos" al número a, y nos queda la función $x \to k(x-a)^2$, y finalmente podemos hacer un movimiento vertical hacia el número b, para decantar en la función cuadrática

$$x \to k \cdot (x-a)^2 + b$$

que se conoce como la *forma estándar* de la parábola. Esta forma es bastante agradable, pues *prima fascie*[1] se conoce el punto en el plano donde la parábola tiene su vértice, esto es (a, b). Además esta parábola tendrá su vértice en el semiplano inferior si $b < 0$ y en consecuencia si en la parábola el factor k es positivo entonces esta parábola cortará al eje horizontal y en consecuencia la parábola tendrá raíces reales. Por otro lado si el vértice está en el semiplano

[1] Significa *a primera vista*, del latín.

superior, esto es cuando $b > 0$ y si la parábola tiene su "concavidad" hacia abajo, esto es cuando $k < 0$ entonces cortará al eje horizontal. De modo que si k y b tienen distintos signos la parábola tendrá dos raíces reales, y no tendrá raíces reales si los valores de k y b tienen el mismo signo.

Ejemplo. La parábola $y = 3(x-2)^2 - 4$, claramente tiene raíces reales[2] que son

$$x = \begin{cases} 2 + \sqrt{\frac{4}{3}} \\ 2 - \sqrt{\frac{4}{3}} \end{cases}$$

y el vértice corresponde al punto $(2, -4)$, y la parábola a partir de este punto "sube" cortando en los valores $2 - \sqrt{\frac{4}{3}}$ y $2 + \sqrt{\frac{4}{3}}$ al eje horizontal, y además corta al eje vertical[3] en el valor $y = 8$.

2.2.1 La relación entre la forma estándar y la forma normal de la parábola

Se dice que la parábola se encuentra en su *forma normal* si se escribe como

$$y = A \cdot x^2 + B \cdot x + C$$

donde exigiremos que, a lo menos, $A \neq 0$. Podemos observar que llevar la parábola de su forma estándar a la forma normal, es relativamente sencillo, por ejemplo

$$y = 3(x-2)^2 - 4 = 3(x^2 - 4x + 4) - 4 = 3x^2 - 12x + 8$$

y de esta última forma no podemos obtener información a primera vista, salvo decir que la parábola corta al eje vertical en el valor $y = 8$. ¿Cómo podemos llevar la parábola desde su forma normal a la forma estándar? El procedimiento es bastante sencillo. Supongamos la parábola en su forma normal $y = A \cdot x^2 + B \cdot x + C$. Vamos a encontrar los valores de k, a y b tal que

$$y = A \cdot x^2 + B \cdot x + C = k \cdot (x-a)^2 + b$$

Expandiendo la forma estándar nos queda

$$A \cdot x^2 + B \cdot x + C = k \cdot x^2 + (-2ka) \cdot x + (ka^2 + b)$$

[2]Recuerde que para esto se hace $3(x-2)^2 - 4 = 0$, y se resuelve fácilmente.

[3]Recuerde que para esto en la ecuación $y = 3(x-2)^2 - 4$ se hace $x = 0$, y se evalua.

de modo que igualando los coeficientes correspondientes tenemos que

$$\begin{aligned} k &= A \\ a &= -\frac{B}{2A} \\ b &= C - \frac{B^2}{4A} \end{aligned} \tag{1}$$

y estas son las ecuaciones de conversión de la parábola normal a su forma estándar.

Trabajemos estas igualdades con la parábola $y = 3x^2 - 12x + 8$, entonces $k = 3, a = -(-12)/(2 \cdot 3) = 2$, y $b = 8 - 144/(4 \cdot 3) = -4$, y de esta forma obtenemos la parábola equivalente estándar $y = 3(x-2)^2 - 4$.

Un algoritmo sencillo es el siguiente: si designamos la parábola por $f(x) = A \cdot x^2 + B \cdot x + C$, entonces su forma estándar es

$$A\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 + f\left(-\frac{B}{2A}\right)$$

2.3 Las parábolas con raíces reales

Consideremos la parábola

$$y = 2(x-2)(x-4)$$

que es una parábola que ni está en su forma normal como tampoco en su forma estándar, pero es evidentemente una parábola. Esta vez no la llevaremos a su forma estándar sino que trataremos de sacar toda la información en esta forma.

En primer lugar las raíces de esta parábola son $x = 2$ y $x = 4$, y en consecuencia su vértice tendrá una proyección en el eje horizontal en el punto medio entre ambos valores, esto es $(2+4)/2 = 3$. Luego evaluamos la proyección de este vértice en el eje vertical correspondiente, y para esto evaluamos la parábola en $x = 3$, es decir

$$y = 2(3-2)(3-4) = -2$$

De este modo hemos calculado el vértice de la parábola, a saber $(3, -2)$, y por lo demás como el coeficiente que acompaña a x^2 es 2, es decir $k = 2$, entonces la forma estándar de esta parábola es

$$y = 2 \cdot (x-3)^2 - 2$$

De esta forma, si tenemos la parábola (con raíces reales)

$$f(x) = k(x - r_1)(x - r_2)$$

entonces la forma estándar de esta parábola es[4]

$$\begin{aligned} f(x) &= k\left(x - \frac{r_1 + r_2}{2}\right)^2 + f(\frac{r_1 + r_2}{2}) \\ &= k\left(x - \frac{r_1 + r_2}{2}\right)^2 - k\frac{(r_1 - r_2)^2}{4} \end{aligned}$$

2.4 La parábola y la varianza

Consideremos la parábola $x \to x^2$, y a ella le hacemos una traslación en a en el eje horizontal, de modo de obtener la parábola $y = (x - a)^2$, y se puede observar que esta parábola tiene una sola raíz real en el valor $x = a$, y además está parábola tiene su vértice en el punto $(a, 0)$.

Supongamos ahora que tenemos un "montón" de parábolas de esta forma, esto es $(x - a_i)^2$ para $i = 1, ..., n$; con a_i reales. Es fácil notar que la suma de estas parábolas sigue siendo una parábola[5], y la pregunta es, ¿cuál es la forma estándar de la parábola $\sum_{i=1}^{n}(x - a_i)^2$? Para resolver esta interrogante utilizaremos las ecuaciones en (1). En efecto,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}(x - a_i)^2 &= n \cdot x^2 - 2x\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \\ &= n \cdot x^2 - 2n\overline{a} \cdot x + \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \end{aligned}$$

haciendo $\overline{a} = \sum_{i=1}^{n} / n$. Y ahora aplicamos las ecuaciones (1) y obtenemos que

$$\begin{aligned} k &= n \\ a &= \overline{a} \\ b &= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - n \cdot (\overline{a})^2 = \sum_{i=1}^{n}(a_i - \overline{a})^2 \end{aligned}$$

[4]Que es una fórmula difícil de memorizar, siendo más sencillo el procedimiento algebraico.

[5]En efecto, si suma dos parábolas, digamos $A_1x^2 + B_1x + C_1$ con $A_2x^2 + B_2x + C_2$ obtenemos la parábola $(A_1 + A_2)x^2 + (B_1 + B_2)x + (C_1 + C_2)$

de modo que

$$\sum_{i=1}^{n}(x-a_i)^2 = n\cdot(x-\overline{a})^2+\sum_{i=1}^{n}(a_i-\overline{a})^2 \tag{2}$$

La parábola dada en (2) no tiene raíces reales si al menos un par de valores son distintos $a_i \neq a_j$. Tenemos el siguiente resultado.

Theorem 1 *Sean* a_1, a_2, ..., a_n *números reales no todos iguales, con* $\overline{a}$ *el promedio de estos valores. Entonces la parábola*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x-a_i)^2$$

tiene su vértice en

$$\left(\overline{a}\,,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a_i-\overline{a})^2\right)$$

La aplicación de este teorema es didácticamente interesante, puesto que no hay que saber cálculo diferencial para establecer la relación entre la varianza de una variable aleatoria, representada por la parábola, y el promedio y la varianza de la muestra a_1, a_2, ..., a_n.

2.5 La ley de caída libre de los cuerpos

Se sabe que un cuerpo arrojado desde una altura h su distancia al suelo se modela por la función

$$y(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2+h$$

donde $g = 9.8\,m/seg.$ Función que es válida hasta el momento del impacto en el suelo, y es una parábola escrita en su forma estándar. ¿En qué tiempo impacta el suelo? Cuando $y(t)=0$, esto es cuando $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$. De modo que la función que modela la distancia del objeto al suelo en su caída libre es

$$y(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\,g\,t^2+h & \text{si } 0\leq t\leq\sqrt{\frac{2h}{g}} \\ 0 & \text{si } t>\sqrt{\frac{2h}{g}} \end{cases}$$

Observemos que el vértice de la parábola es $(0,h)$.

Observemos que si hacemos $s(t)=y(t)-h$, entonces obtenemos la distancia recorrida por el cuerpo que es arrojado desde una altura h, y el signo menos se interpreta por la dirección opuesta a la diracción positiva del eje vertical, esto es

$$s(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\, g\, t^2 & \text{si } 0 \leq t \leq \sqrt{\frac{2h}{g}} \\ h & \text{si } t > \sqrt{\frac{2h}{g}} \end{cases}$$

A menudo es útil expresar esta fórmula simplemente como $s(t) = -\frac{1}{2}\, g\, t^2$ entendiéndola como válida solo para la distancia h desde donde se suelta el objeto.

2.6 Lanzamiento vertical de un objeto con velocidad inicial v_0

Si lanzamos un objeto en dirección vertical con velocidad instantanea[6] v_0, la altura del objeto, respecto del nivel en que fue lanzado $h(t)$, se modela inicialmente por la parábola

$$h(t) = v_0 t - \frac{1}{2}\, g\, t^2 \tag{3}$$

función que es válida hasta que el cuerpo por efecto de la gravedad regrese al suelo. ¿Cuándo regresa al suelo? Se debe resolver $v_0 t - \frac{1}{2}\, g\, t^2 = 0$, cuyas soluciones son

$$\begin{aligned} t &= 0 \text{ (cuando el objeto está a punto de ser lanzado con velocidad } v_0\text{)} \\ t &= \frac{2v_0}{g} \text{ (el tiempo que tarda en llegar al suelo)} \end{aligned}$$

de modo que el modelo quedaría como

$$h(t) = \begin{cases} v_0 t - \frac{1}{2}\, g\, t^2 & si\ t < \frac{2v_0}{g} \\ 0 \quad si\ \ t \geq \frac{2v_0}{g} \end{cases}$$

La parábola $v_0 t - \frac{1}{2}\, g\, t^2$ (o mejor dicho, el trozo de parábola) alcanza su valor máximo en el tiempo $t = \frac{v_0}{g}$ y que corresponde a la altura

$$h\left(\frac{v_0}{g}\right) = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}$$

[6] Para el entendimiento de los estudiantes debemos pensar en la salida de un proyectil arrojado por una persona en dirección vertical.

En un ejemplo concreto, si lanzamos una piedra en forma vertical con una velocidad inicial de $10\,m/seg$, esta piedra alcanzará una altura de poco más de 5 metros (5.102 aprox.).

En la ecuación (3) por lo general la aceleración de gravedad tiene el valor de 9.8 si se mide en $metros/seg^2$ o el valor de 32 si se mide en pie/seg^2.

2.7 Movimiento de una bola sobre la mesa

De manera extremadamente simplificada, y sin considerar el movimiento angular de una bola, se puede determinar que el centro de masa de una bola que rueda sobre una mesa horizontal producto de una velocidad inicial, v_0, que se le ha dado, que su función de desplazamiento, $s(t)$, se rige por la ecuación (parabólica)

$$s(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g \cdot \mu \cdot t^2$$

siendo μ el coeficiente de roce propio de la mesa y el material de la bola. Este movimiento se deberá detener en virtud de la fuerza de roce (heredado es esta ecuación por el coeficiente de roce) y se detendrá en el momento en que su velocidad sea nula, esto es cuando

$$v(t) = \frac{d\,s(t)}{dt} = v_0 - g \cdot \mu \cdot t = 0$$

es decir

$$t = \frac{v_0}{g \cdot \mu}$$

De modo que en estricto rigor el desplazamiento de esta bola está dada por

$$s(t) = \begin{cases} v_0 t - \frac{1}{2} g \cdot \mu \cdot t^2 \quad si\ \ 0 \leq t \leq \frac{v_0}{g \cdot \mu} \\ \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g \cdot \mu} \quad si\ \ t \geq \frac{v_0}{g \cdot \mu} \end{cases}$$

3 La parábola caótica de Robert May

La parábola $y = k\,x(1-x)$ en su representación estándar es

$$y = -k(x - 1/2)^2 + k/4$$

de modo que su vértice esta ubicado en el punto $(1/2, k/4)$, sus raíces son $x = 0$ y $x = 1$.. Ahora si restringimos el dominio de esta parábola para los valores $0 < x < 1$ y queremos exigir que el valor de la parábola también caiga en el mismo intervalo, esto es $0 < y < 1$, entonces el valor del parámetro k debe satisfacer que $0 < k < 4$.

Definamos la sucesión

$$x_{n+1} = k \cdot x_n(1 - x_n) \tag{4}$$

con la condición inicial que $0 < x_0 < 1$, y $0 < k < 4$. Con estas dos condiciones nos aseguramos que $0 < x_n < 1$ para cualquier $n = 0, 1, 2, ...$

El modelo dinámico discreto que nos entrega la ecuación (4) se puede entender con las siguientes iteraciones

1. hacer $x = x_0$
2. calcular $y = k \cdot x(1 - x)$
3. hacer $x = y$
4. volver al paso 2.

La Figura 1 describe las primeras 4 iteraciones