Segundo Trabajo de Cálculo Numérico

Eliseo Martínez *

4 de octubre de 2019

Resumen

El desarrollo del problema tendrá un 1 si está corectamente y un 0 si está mal desarrollado, o si está incompleto, o tuvo un error de cálculo. Si se tiene un 0 en cualquier item el trabajo se considera R, y debe ser enmendado por el alumno. Si todos los items tienen un 1 el trabajo se califica con A. Las respuestas deben ser entregadas en hojas manuscritas o tipeadas en algún procesador de texto y puestas convenientemente en un archivador sencillo, en cuya carátula externa debe ir el nombre del aluumno, su carrera y el nombre de la asignatura. Para cada problema se entrega la rúbrica o estándares que se evaluará.

1. Interpolación cúbica segmentada

Usted tiene asignado, donde está su nombre, un hipervínculo que lo lleva a una tabla de censo poblacional de un país. Realice lo siguiente:

1. Usted debe construir una función formada por segmentos de polinomíos cúbicos para interpolar los datos de su tabla censal. Si su tabla contiene menos de 8 datos entonces interpole segmentadamente mediante polinomios cuadráticos. Siempre la función terminará con un polinomio lineal o cuadrático o cúbico.

2. Debe graficar los puntos de la tabla demográfica, y en el mismo plano cartesiano el polinomio segmentado cúbico (o cuadrático según sea el caso).

3. Debe especificar todos los polinomios involucrados que contribuyeron a la segmentación del polinomio definitivo de interpolación.

4. Debe calcular alguna población interpolando en algunos años de interés.

*Trabajo financiado por el Proyecto de Docencia: Hacer y corregir en los procesos de evaluación, 2017

1.1. Rúbrica para el modelo de interpolación

1. Debe usted brevemente explicar la metodología a usar para la resolución del problema. No se aceptará pantallazos del software que utilizó para realizar sus cálculos.
2. El gráfico pedido debe llevar un título claramente explicativo, y poner correctamente las unidades a usar en los ejes. El gráfico debe ser claro y de lectura simple.
3. La tabla censal debe estar impresa en forma adecuada, con un título claro, explicativo. Y debe agregar en otra tabla los puntos interpolados.
4. Los polinomios de los segmentos deben estar escritos en forma compacta y con no más de tres cifras decimales e indicar a que tabla seccional corresponde.

2. Interpolación en un zoom de grises

Junto a su nombre aparece una matriz en formato .txt de dimensión 4×4, indicando con esto que en cada veŕtice (i, j), con $i, j = 1, 2, 3, 4$, tiene asignado un color gris, codificado por valores enteros que van desde el 0 (negro) hasta el 255 (blanco). Realice lo siguiente:

1. Asigne un gris, mediante interpolación a los siguientes puntos de su tabla (2,5; 2,5); (1,5; 1,5); y (3,5; 3,5). Rcuerde que se utiliza para los puntos interiores de la matriz la interpolación bicúbica, y para los bordes la interpolación bilineal.
2. Realice un esquema o gráfico indicando los puntos a interpolar. Describa los polinomios de interpolación utilizado para cada uno de los tres casos pedidos.

2.1. Rúbrica para interpolación de grises

1. No imprima pantallazos del software utilizado.
2. Describa la metodología que utilizará, y para cada interpolación solicitada entregue los polinomios utilizados.
3. El esquema solicitado puede ser un grafo con los 16 nodos que representan los grises (valores), y luego introduzca los nodos de interpolación con su valor *entero* respectivo.

3. Los polinomios de Taylor

Considere la siguente función llamada densidad normal de parámetros μ y σ, $n(x,\mu,\sigma)$, definida en el intervalo $-\infty < x < \infty$

$$n(x,\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$$

donde los parámetro μ y σ los tiene asignado en la sexta y séptima columna de la base de datos en la fila asociada a su nombre. Realice lo siguiente:

1. Grafique la función densidad normal.

2. Entregue el polinomio de Taylor de grado 3, que denotaremos por $P_3(x)$, que se aproxima a su función de densidad normal en torno al punto a (entregado como dato junto a su nombre en la octava columna).

3. Grafique este polinomio de Taylor de grado 3, $P_3(x)$, en el mismo plano cartesiano de la función de densidad normal.

4. Encuentre un intervalo $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ de tal forma que

$$|P_3(x) - n(x,\mu,\sigma)| < 10^{-3}$$

para todos los valores de $x \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$

5. Calcule

$$|\int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} P_3(x)dx - \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} n(x,\mu.\sigma)dx|$$

3.1. Rúbrica para el polinomio de Taylor

1. Los gráficos deben ser claros y precisos. El punto a debe aparecer notoriamente en el gráfico.

2. El polinomio cúbico de Taylo, $P_3(x)$, debe estar bien escrito en forma exacta (=) y en su forma aproximada ($\approx$)

3. Para el intervalo $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ debe indicarse la metodología de búsqueda.

4. Entregue los resultados de las integrales, con no más de cinco decimales.

4. Ajuste en mínimos cuadrados

Para la tabla entregada en formato .txt y con el nombre de tablai.txt junto a su nombre, donde la primera columna la puede identificar con valores para la variable x y la segunda columna para la variable y, debe ajustar tres funciones (modelos) a los datos entregados, a saber: modelo lineal, cuadrático y cúbico. Mediante razonamiento fundado debe elegir el mejor modelo que se ajusta a los datos.

4.1. Rúbrica para el ajuste en mínimos cuadrados

1. Para cada valor de x debe realizar los calculos mediante los tres modelos y compararlos con los valores de y, para esto deber entregar los resultados en una tabla, donde las columnas son x, y seguido de las columnas de los valores de los tres modelos, lineal, cuadrático y cúbico.

2. Si bien los cálculos de los parámetros los realiza el software matemático, usted debe plantear detalladamente las ecuaciones para el cálculo de los parámetros para cada modelo y solo entregar las soluciones de estas ecuaciones.

5. La densidad normal bivariante

Usted tiene asignada una tabla de valores bajo el título de **binormal** asociadas a su nombre. Son dos variables que describen la estatura (en metros) y el peso 8en kilogramos) asociados a una misma persona. Se pie lo siguiente:

1. Construya una densidad normal bivariante, estimando los parámetros conforme los datos entregados en su tabla de valores α y β y la matriz de varianza y covarianza A que corresponde al modelo

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{det(A)}}e^{-\frac{1}{2}(x-\alpha,\ y-\beta)A^{-1}(x-\alpha,\ y-\beta)^T}$$

   donde

$$A = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \rho\sigma_x\sigma_y \\ \rho\sigma_x\sigma_y & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$$

2. Construya, mediante un software, la gráfica tridimensional de la superficie generada por el modelo normal bivariante estimado por usted.

3. Indique las unidades de todos los parámetros que sirven para estimar los valores de α, β, ρ, σ_x y σ_y

4. Construya una tabla bidimensional de frecuencias relativas, y compara estas frecuencias relativas con las obtenidas en su modelo al hacer la integración correspondientes a las particiones de su tabla bidimensional. Compare estos valores y determina de alguna forma su buena o mala aproximación o ajuste del modelo.

5.1. Rúbrica para el modelo normal bivariante

1. Debe escribir nitidamente y con precisión su densidad bivariante.

2. La gráfica debe ser nítida y definir correctamente las dimensiones (o escalas) de los tres ejes

3. Se recomienda entregar en dos tablas los cálculos de las frecuencias relativas o porcentuales y los valores de las integrales. Para aclarar este punto de damos el siguiente ejemplo: suponga que usted tiene el intervalo cruzado entre $[1{,}6, 1, 7]$ intervalo de alturas en metros con el intervalo $[68, 70]$ de pesos en kilogramos, y calcula, conforme a sus datos que el trece por ciento de las personas pertenecen a esos intervalos; entonces usted comparará este valor con la integral doble en su densidad normal bivariante entre estos límites.

Fecha de recepción del trabajo: hasta el 03 de octubre del 2019.