

El mapa logístico de Robert May y su aplicación a la Biología Marina

Eliseo Martínez H.

27 de agosto de 2025

Introducción

En 1976, Robert May introdujo el **mapa logístico**, un modelo matemático sorprendentemente simple y, al mismo tiempo, capaz de explicar comportamientos muy complejos en las poblaciones biológicas.

El modelo se define por la función cuadrática:

$$x_{t+1} = r x_t (1 - x_t),$$

donde:

- x_t representa el tamaño de la población en la generación t , normalizado entre 0 y 1,
- $r > 0$ es la **tasa de crecimiento** o parámetro de control.

Interpretación biológica

Este modelo refleja el equilibrio entre dos fuerzas:

1. La **reproducción**, representada por el factor rx_t , que impulsa el crecimiento de la población.
2. La **limitación de recursos**, representada por $(1 - x_t)$, que introduce competencia cuando la población crece.

En contextos de **Biología Marina**, el modelo puede aplicarse al estudio de poblaciones de:

- fitoplancton en un ecosistema marino cerrado,
- peces de pequeña talla en un área delimitada,
- larvas marinas en un espacio con recursos finitos.

Dinámica del sistema

Dependiendo del valor del parámetro r , se observan distintos comportamientos:

- Para $0 < r < 1$, la población tiende a extinguirse ($x_t \rightarrow 0$).
- Para $1 < r < 3$, la población converge a un **estado estable**.
- Para $3 < r < 3,45$, aparecen ciclos periódicos de 2 valores (bifurcación).
- Para valores mayores de r , la dinámica se vuelve cada vez más compleja, con ciclos de 4, 8, 16, hasta llegar al **caos**.

Valor didáctico para Biología Marina

Este modelo permite a los estudiantes observar cómo:

- un sistema **determinista y sencillo** (una parábola) puede generar dinámicas caóticas,
- pequeñas variaciones en el parámetro r producen cambios drásticos en el comportamiento poblacional,
- se establece un vínculo directo entre **matemáticas** y la **ecología marina**.

Ejemplo práctico

Supongamos que una población de peces larvales sigue el modelo con $r = 2,8$ y condición inicial $x_0 = 0,3$ (30 % de la capacidad máxima). Iterando la ecuación, los estudiantes pueden observar cómo la población se estabiliza en un valor fijo, representando un equilibrio ecológico.

Objetivo

Construir en **Excel** una simulación del **mapa logístico** para estudiar dinámicas poblacionales (equilibrio, ciclos y caos) en un contexto de Biología Marina.

Modelo

El mapa logístico (Robert May, 1976) se define por:

$$x_{t+1} = r x_t (1 - x_t),$$

donde $x_t \in [0, 1]$ es la población normalizada en la generación t y $r > 0$ es la tasa de crecimiento.

Preparación de la hoja en Excel

1. En la fila 1, escriba los encabezados:

A1: Generación (t) B1: Población x_t D1: Parámetro r D2: Condición inicial x_0

2. Ingrese **valores** (puede cambiarlos luego):

A2: 0, D1: 2,8, D2: 0,30

En **B2** escriba =D2 (para que x_0 se tome desde D2).

3. En **A3** escriba:

=A2+1

4. En **B3** escriba la **fórmula iterativa**:

=D\$1*B2*(1-B2)

Nótese el uso de **\$D\$1** para fijar el parámetro r .

5. Seleccione **A3:B3** y arrastre hacia abajo (por ejemplo hasta la fila 200) para generar muchas generaciones.

Nota regional (decimales y separadores). Si su Excel usa coma decimal (p.ej., Chile), escriba números como 2,8 y 0,30. La fórmula =D1*B2*(1-B2) no cambia, ya que no usa funciones con separadores de argumentos.

Gráfico de evolución temporal

1. Seleccione las columnas **A** y **B** con sus datos.
2. Inserte un gráfico: **Insertar** → **Dispersión (XY)** → *Dispersión con líneas suaves*.
3. Formatee ejes: eje X = Generación t , eje Y = Población x_t .

Exploración del parámetro r

Modifique **D1** y observe el gráfico:

- $0 < r < 1$: $x_t \rightarrow 0$ (extinción).
- $1 < r < 3$: converge a un **equilibrio**.
- $3 < r < 3,45$: **ciclo de período 2**.
- Valores mayores: cascada de duplicación de período (4, 8, 16, ...) hasta **comportamiento caótico**.

Actividad

1. Elija tres valores: $r = 2,5$, $r = 3,2$, $r = 3,7$. Describa el comportamiento en cada caso (equilibrio, ciclo, caos).
2. Cambie la condición inicial **D2** (p. ej., 0,10, 0,55) y compare con el mismo r . ¿Varía el estado final?
3. Explique biológicamente qué puede representar r (e.g., *tasa de reproducción* bajo recursos limitados) y qué limitaciones tiene el modelo.

Extensiones opcionales

1. Agregue una tercera columna x_{t+1} (en **C**) para construir el *diagrama de telaraña* (cobweb) contra la parábola $y = rx(1-x)$ y la recta $y = x$ (requiere un gráfico XY adicional).
2. Explore $r > 4$ y observe que los valores pueden salir de $[0, 1]$; discuta la interpretación biológica.

Sugerencias didácticas

- Pida a los estudiantes identificar el *equilibrio* resolviendo $x^* = rx^*(1-x^*)$ y comprobar numéricamente su estabilidad.
- Relacione hallazgos con ejemplos marinos: fitoplancton, larvas o peces pequeños en áreas de recursos limitados.