Nuevas aplicaciones de la derivada a la Biología Marina

Eliseo Martínez H.

Indicaciones

Calcule derivadas cuando sea necesario. Para cada función: (i) encuentre los puntos críticos, (ii) clasifique cada punto como máximo, mínimo o punto de silla usando la segunda derivada cuando corresponda, y (iii) determine los puntos de inflexión (si existen) y el intervalo donde la función es cóncava hacia arriba o hacia abajo.

Problemas

1. Crecimiento de una población de fitoplancton.

$$N(t) = 200te^{-0,2t}, \qquad t \geq 0.$$

a) Encuentre los puntos críticos y determine el tiempo en que la población alcanza su máximo.
b) Calcule la cantidad máxima de fitoplancton.
c) Halle los puntos de inflexión y determine para qué intervalos la función es cóncava hacia arriba y hacia abajo.

2. Temperatura y actividad enzimática.

$$v(T) = 5Te^{-0,1T}, \qquad T > 0.$$

a) Encuentre los puntos críticos y la temperatura que maximiza la actividad.
b) Calcule la velocidad máxima.
c) Determine los puntos de inflexión de $v(T)$ y describa la concavidad.

3. Superficie de una jaula submarina.
Volumen fijo $V = 50\pi$ m^3. Radio $r > 0$, altura h. El volumen del cilindro es $V = \pi r^2 h$.
a) Exprese la superficie total $S(r)$ (bases + lateral) como función de r usando la restricción del volumen.
b) Encuentre el valor de r que minimiza $S(r)$ y calcule la correspondiente h.

c) Calcule la segunda derivada $S''(r)$ en el punto crítico y determine la concavidad; ¿existe algún punto de inflexión para $S(r)$?

4. Alimentación óptima de ostras.

$$G(x) = 12x - 0{,}6x^2, \qquad x \geq 0.$$

a) Encuentre los puntos críticos y la cantidad de alimento que maximiza la ganancia.
b) Calcule la ganancia máxima.
c) ¿Tiene esta función puntos de inflexión? Justifique.

5. Profundidad óptima para el crecimiento del coral.

$$R(z) = ze^{-0{,}05z}, \qquad z \geq 0.$$

a) Determine los puntos críticos y encuentre la profundidad donde la tasa de crecimiento es máxima.
b) Calcule la tasa máxima.
c) Determine los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad.

6. Distribución de nutrientes.

$$C(x) = 10 - 2x + 0{,}1x^2, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

a) Encuentre los puntos críticos y determine si corresponden a máximos o mínimos.
b) Calcule la concentración mínima y la distancia donde ocurre.
c) Haga el estudio de concavidad y puntos de inflexión.

7. Oxigenación óptima de un estanque.

$$O(t) = 8 - 3e^{-0{,}4t} - 0{,}2t, \qquad t \geq 0.$$

a) Encuentre los puntos críticos y determine cuándo el oxígeno alcanza su valor máximo (si existe).
b) Calcule el valor máximo de $O(t)$ (si existe).
c) Determine los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad de $O(t)$.

Elaborado por Eliseo Martínez y ChatGPT (Sísifo)