

# Análisis factorial

Eliseo Martínez H.

## 1. Introducción

En esta sección necesitaremos fuertes herramientas estadísticas. Observe que hasta ahora, en los métodos de análisis multivariante que hemos utilizado hemos trabajado con la matriz  $X$  de datos para reducir variables o clasificar observaciones y variables, que en definitiva son métodos para reconocer patrones o estructuras subyacentes entre las observaciones o entre las respuestas a las variables. El método del análisis factorial sirve para explicar un conjunto de variables observadas mediante un pequeño número de *variables latentes no observadas* (no medidas). Estas variables latentes las llamaremos *factores*.

Intentaremos explicar cómo estas variables observadas pueden ser explicadas por factores no observados mediante unos sencillos ejemplos. Supongamos que queremos medir la eficiencia de una empresa, y para esto aplicamos una serie de variables (preguntas) que nos dan información sobre la empresa para intentar medir su eficiencia. Por lo general ocurre que dentro de la serie de variables aplicadas a la empresa éstas no son independientes entre sí, y de tal forma que, conocidas las que están fuertemente correlacionadas podemos conocer algunas de ellas para predecir las restantes con poco error; y además, es lo que esperamos, se formarán grupos de alta correlación que darán a conocer los factores latentes que darán sentido y simplificarán la serie de variables con que medimos la eficiencia de la empresa.

Otro ejemplo. Supongamos que tomamos una veintena de mediciones del cuerpo humano. Es claramente intuitivo que varias de esas mediciones estarán fuertemente correlacionadas, por ejemplo la estatura de una persona estará fuertemente correlacionada con la longitud del pie, etcétera. De tal forma que, en general las dimensiones del cuerpo humano dependerán de ciertos factores, que si los descubrimos, podríamos prever las dimensiones con menos variables y con error mínimo.

Un último ejemplo. Supongamos que queremos estudiar el desarrollo humano en los países del mundo o de un determinado continente, y para esto realizamos una serie de mediciones que tienen que se obtienen mediante aplicaciones de variables económicas, sociales y demográficas, y que con toda seguridad muchas de ellas estarán fuertemente correlacionadas, piense por ejemplo en la variable Producto Interno Bruto que estará fuertemente correlacionada con la variable presupuesto para la investigación científica nacional. De modo que el desarrollo de un país dependerá de unos ciertos factores que si son conocidos podemos prever el conjunto de las variables para cada país.

Es claro que estos factores, si son descubiertos, no deben estar correlacionados entre sí. Es posible que la búsqueda de estos factores se confunda con la búsqueda de las componentes principales de las variables. Algo de cierto hay en esto, sin embargo, recordemos que las componentes principales se construyen para explicar las varianzas entre las vari-

ables, mientras que, como lo veremos aquí, los factores se construirán para explicar las covarianzas o correlaciones entre las variables. Hay otra diferencia más entre las componentes principales y los factores. Las primeras son una herramienta descriptiva o de tipo exploratoria, mientras que el análisis factorial exige un modelo estadístico formal para la generación de datos, y por lo tanto acude a las pruebas de hipótesis y a la inferencia.

## 2. El modelo estadístico para el análisis factorial

Supongamos que tenemos una serie de variables  $x_1, x_2, \dots, x_p$  que vamos a aplicar a una determinada unidad muestral que está bajo estudio. Entonces formamos un vector de variables  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p)^t$ . La hipótesis básica es que el vector  $\mathbf{x}$  admite la siguiente representación

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{f} + \mathbf{u} \quad (1)$$

donde:

- (1)  $\boldsymbol{\mu}$  es un vector constante de  $p \times 1$
- (2)  $\mathbf{f}$  es un vector de  $m \times 1$  que representa las variables latentes o factores. Se supone que este vector sigue una distribución normal  $\mathbf{N}_m(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ . Es decir cada componente tiene media cero, independientes entre las componentes y de varianza 1 por componente.
- (3)  $\boldsymbol{\Lambda}$  es una matriz de  $p \times m$  de constantes conocidas, con  $m < p$ . Contiene los coeficientes que describen como los factores explican o describen al vector de variables  $\mathbf{x}$ . A esta matriz se le llama *matriz de carga*.
- (4)  $\mathbf{u}$  es un vector de la misma dimensión de  $\mathbf{x}$ , y describe las perturbaciones no explicadas por los factores. Se supone que  $\mathbf{u}$  tiene distribución  $\mathbf{N}_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Psi})$ , donde  $\boldsymbol{\Psi}$  es una matriz de  $p \times p$  diagonal de la forma  $diag\{\psi_1^2, \dots, \psi_p^2\}$ , y además supondremos que  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{f}$  no están correlacionados.

Con estas hipótesis se deduce que:

- (a)  $E[\mathbf{x}] = \boldsymbol{\mu}$
- (b) El vector de variables  $\mathbf{x}$  sigue una distribución normal  $\mathbf{x} \sim \mathbf{N}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V})$  por ser suma de variables normales, y además la matriz de varianzas y covarianzas  $\mathbf{V}$  se calcula de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= E[(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^t] = E[(\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{f} + \mathbf{u})(\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{f} + \mathbf{u})^t] \\ &= E[(\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{f}\mathbf{f}^t\boldsymbol{\Lambda}^t + \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{f}\mathbf{u}^t + \mathbf{u}\mathbf{f}^t\boldsymbol{\Lambda}^t + \mathbf{u}\mathbf{u}^t)] \\ &= \boldsymbol{\Lambda}E[\mathbf{f}\mathbf{f}^t]\boldsymbol{\Lambda}^t + \boldsymbol{\Lambda}E[\mathbf{f}\mathbf{u}^t] + E[\mathbf{u}\mathbf{f}^t]\boldsymbol{\Lambda}^t + E[\mathbf{u}\mathbf{u}^t] \\ &= \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda}^t + \boldsymbol{\Psi} \end{aligned}$$

puesto que  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{f}$  no están correlacionados. La matriz de varianzas y covarianza  $\mathbf{V}$  es la suma entre  $\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda}^t$ , que es una matriz simétrica de rango  $m < p$ , y esta matriz contiene la parte común al conjunto de las variables y depende de las covarianzas entre las variables y los factores; y entre  $\boldsymbol{\Psi}$ , que contiene la variabilidad específica de cada variables, que es independiente del resto.

La igualdad

$$\mathbf{V} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda}^t + \mathbf{\Psi}$$

entrega bastante observación. En efecto, la ecuación (1) se detalla como

$$\begin{aligned} x_1 &= \mu_1 + \lambda_{11} f_1 + \lambda_{12} f_2 + \cdots + \lambda_{1m} f_m + u_1 \\ x_2 &= \mu_2 + \lambda_{21} f_1 + \lambda_{22} f_2 + \cdots + \lambda_{2m} f_m + u_2 \\ &\vdots \\ x_i &= \mu_i + \lambda_{i1} f_1 + \lambda_{i2} f_2 + \cdots + \lambda_{im} f_m + u_i \\ &\vdots \\ x_p &= \mu_p + \lambda_{p1} f_1 + \lambda_{p2} f_2 + \cdots + \lambda_{pm} f_m + u_p \end{aligned}$$

Luego si calculamos la varianza a la variable  $x_i$  obtenemos

$$V[x_i] = \sum_{j=1}^m \lambda_{ij}^2 V[f_j] + V[u_i]$$

y puesto que  $V[f_j] = 1$ , para todo  $j = 1, \dots, p$ , y además  $V[u_i] = \psi_i$  se tiene que

$$V[x_i] = \sigma_i^2 = \sum_{j=1}^m \lambda_{ij}^2 + \psi_i^2$$

Y esta descomposición de varianzas tiene la misma interpretación que la descomposición para la ANDEVA, donde el primer sumandor  $\sum_{j=1}^m \lambda_{ij}^2$  es la parte de la varianza de  $\sigma_i^2$  que es explicada por los factores y que llamaremos *comunalidad*, y el otro sumando es el efecto de la perturbación no explicada por el modelo (1) o *ruido blanco*, o a veces llamada *variabilidad común*. A la *comunalidad* de la variable  $x_i$  la denotaremos por

$$h_i^2 = \sum_{j=1}^m \lambda_{ij}^2$$

de manera que

$$\sigma_i^2 = h_i^2 + \psi_i^2$$

Finalmente podemos obtener otra propiedad generada por el modelo (1), y esta es que

$$E[(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \mathbf{f}^t] = \mathbf{\Lambda}$$

En efecto, de la ecuación (1) tenemos que

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \mathbf{f}^t &= \mathbf{\Lambda} \mathbf{f} \mathbf{f}^t + \mathbf{u} \mathbf{f}^t \\ E[(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \mathbf{f}^t] &= \mathbf{\Lambda} E[\mathbf{f} \mathbf{f}^t] + E[\mathbf{u} \mathbf{f}^t] \\ E[(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \mathbf{f}^t] &= \mathbf{\Lambda} \end{aligned}$$

puesto que  $E[\mathbf{f} \mathbf{f}^t] = \mathbf{I}$  y  $E[\mathbf{u} \mathbf{f}^t] = \mathbf{0}$  ya que no correlacionan.

Finalmente la ecuación (1) implica que dada una muestra  $i$  a la cual le aplicamos la variable  $x_j$ , esto es  $x_j(i) = x_{ij}$ , entonces

$$x_{ij} = \mu_j + \lambda_{j1} f_{1i} + \lambda_{j2} f_{2i} + \cdots + \lambda_{jm} f_{mi} + u_{ij} ; i = 1, \dots, n ; j = 1, \dots, p \quad (2)$$

Y esta ecuación está indicando que el valor observado por la  $i$ -ésima muestra en respuesta a la  $j$ -ésima variable es causa de la media de la variable,  $\mu_j$ ; de los efectos de los  $m$  factores latentes  $\lambda_{j1} f_{1i} + \lambda_{j2} f_{2i} + \dots + \lambda_{jm} f_{mi}$ ; y de un ruido blanco o perturbación específica de cada observación  $u_{ij}$ .

Luego, para la matriz de datos  $\mathbf{X} = (x_{ij})$ , la forma matricial generada por el modelo (1) es

$$\mathbf{X} = \mathbf{1}\boldsymbol{\mu}^t + \mathbf{F}\boldsymbol{\Lambda}^t + \mathbf{U}$$

donde  $\mathbf{1}$  es el vector de  $n \times 1$  de unos,  $\mathbf{F}$  es una matriz de  $n \times m$  que contiene los  $m$  factores para las  $n$  unidades muestrales,  $\boldsymbol{\Lambda}^t$  es la traspuesta de la matriz de carga de  $m \times p$  cuyos coeficientes relacionan las variables y los factores y  $\mathbf{U}$  es la matriz  $n \times p$  de las perturbaciones.

Véamos un ejemplo para fijar ideas. Supongamos que tenemos tres variables  $x_1, x_2$  y  $x_3$ , y pensamos que hay dos factores latentes, esto es

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

De tal modo que la matriz de varianzas y covarianzas del vector de variables satisface

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{21} & \lambda_{31} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \lambda_{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \psi_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_3^2 \end{pmatrix}$$

siendo  $diag\{\psi_1^2, \psi_2^2, \psi_3^2\}$  la matriz de varianzas del vector de perturbaciones. Las communalidades son

$$h_i^2 = \sum_{j=1}^2 \lambda_{ij}^2 = \lambda_{i1}^2 + \lambda_{i2}^2; \quad i = 1, 2, 3.$$

de manera que

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 &= h_i^2 + \psi_i^2; \quad i = 1, 2, 3 \\ \sigma_{ij} &= \lambda_{i1}\lambda_{j1} + \lambda_{i2}\lambda_{j2}; \quad i = 1, 2, 3; \quad i \neq j \end{aligned}$$

Por otro lado si la muestra es de  $n = 4$  elementos, entonces

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{11} & f_{21} \\ f_{12} & f_{22} \\ f_{13} & f_{23} \\ f_{14} & f_{24} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{21} & \lambda_{31} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \lambda_{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} \end{pmatrix}$$

### 3. La unicidad del modelo

Supongamos que tenemos el modelo

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{f} + \mathbf{u}$$

con todas las hipótesis establecidas en (1). Por otro lado, sabemos que es posible encontrar matrices  $\boldsymbol{\Lambda}^*$  y  $\mathbf{f}^*$  tal que

$$\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{f} = \boldsymbol{\Lambda}^*\mathbf{f}^*$$

En efecto, supongamos que tenemos una matriz  $\mathbf{H}$  de  $m \times m$ , no singular y no diagonal, entonces podemos escribir

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{H}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{f} + \mathbf{u}$$

ahora haciendo las siguientes transformaciones  $\boldsymbol{\Lambda}^* = \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{H}$  y  $\mathbf{H}^{-1}\mathbf{f} = \mathbf{f}^*$ , obtenemos la representación

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Lambda}^*\mathbf{f}^* + \mathbf{u} \quad (3)$$

Sin embargo, la distribución de vector aleatorio  $\mathbf{f}^*$  tiene una distribución normal multivariante tal que

$$\begin{aligned} E[\mathbf{f}^*] &= \mathbf{0} \\ V[\mathbf{f}^*] &= \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{H}^{-1})^t \end{aligned}$$

de modo que las componentes de  $\mathbf{f}^*$  están correlacionadas, violando la hipótesis n° 2 del modelo. De modo que la representación dada en (3) no nos sirve para nuestros intereses.

Sin embargo, si tenemos un vector de factores  $\mathbf{f}$  que sigue una distribución  $N(\mathbf{0}, \mathbf{V}_f)$ , donde  $\mathbf{V}_f$  es una matriz no diagonal y definida positiva, entonces es posible encontrar una matriz  $\mathbf{A}$  tal que  $\mathbf{V}_f = \mathbf{A}\mathbf{A}^t$ , y entonces  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{V}_f(\mathbf{A}^{-1})^t = \mathbf{I}$ , de modo que podemos escribir

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\mu} + (\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{A})(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{f}) + \mathbf{u}$$

y definiendo  $\boldsymbol{\Lambda}^* = \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{A}$  y  $\mathbf{f}^* = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{f}$ , donde si esta vez el nuevo vector de factores  $\mathbf{f}^*$  tiene matriz de varianzas y covarianzas  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{V}_f(\mathbf{A}^{-1})^t = \mathbf{I}$ , es decir sus componentes no correlacionan. De tal modo que, en este sentido la representación del modelo es única si tenemos un vector de factores no correlacionados, puesto que con una transformación lineal adecuada lo podemos no correlacionar.

Finalmente si tenemos el modelo (1),  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{f} + \mathbf{u}$ , cumpliendo todas las hipótesis, y tomamos una matriz ortogonal  $\mathbf{H}$ , entonces es claro que  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\mu} + (\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{H})(\mathbf{H}^t\mathbf{f}) + \mathbf{u}$ , luego ambos modelos son indistinguibles puesto que tanto  $\mathbf{f}$  como  $\mathbf{H}^t\mathbf{f}$  son no correlacionadas en sus componentes. De tal forma que podemos asegurar que el modelo es "único" salvo transformaciones ortogonales (aún cuando algunos autores dicen que el modelo está indeterminado bajo transformaciones ortogonales). Lo interesante que, toda vez que tengamos el modelo (1), podemos efectuar rotaciones ortogonales sobre el vector de factores, rotaciones adecuadas imponiendo condiciones a la matriz de carga (no olvidemos que la matriz de carga será  $\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{H}$ , si decidimos ortogonalizar).

## 4. ¿Cuándo realizar un análisis factorial?

Realizar un análisis factorial significa aceptar que el vector de variables satisface el modelo (1), y esto significa que  $\mathbf{x} \sim \mathbf{N}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V})$ , de otra forma deben existir altas correlaciones entre las variables, que es cuando podemos suponer que se explican por factores comunes. El análisis de la matriz de correlaciones de la muestra, será pues el primer paso a dar. Podemos comprobar el grado de correlación con las siguientes pruebas o test,

- **Test de esfericidad de Bartlett.** Suponiendo normalidad entre las variables se contrastan las siguientes hipótesis

$$H_0 : \mathbf{R} = \mathbf{I} \quad v/s \quad H_0^c : \mathbf{R} \neq \mathbf{I}$$

siendo  $\mathbf{R}$  la matriz de correlación del vector  $\mathbf{x}$ , esto es  $\mathbf{R} = \mathbf{D}^{-1/2} \mathbf{V} \mathbf{D}^{-1/2}$ , con  $\mathbf{D} = \text{diag}\{\sigma_1^2, \dots, \sigma_p^2\}$ , y el estadístico de prueba que se utiliza es

$$B = -(n-1 - (2p+5)/6) \ln |\mathbf{R}^*|$$

siendo  $\mathbf{R}^*$  la matriz de correlación muestral, y donde  $B$ , bajo  $H_0$ , se distribuye según una  $\chi_{p(p-1)/2}^2$ . De tal forma que no es aconsejable hacer un análisis factorial a los datos si aceptamos la hipótesis  $H_0$ .

- **Cálculo del índice KMO (Kaiser-Meyer-Olkin).** El índice KMO se define como

$$KMO = \frac{\sum \sum_{j \neq k} r_{jk}^2}{\sum \sum_{j \neq k} r_{jk}^2 + \sum \sum_{j \neq k} a_{jk}^2}$$

donde  $r_{jk}$  mide la correlación lineal simple entre las variables observadas  $j$  y  $k$ ; y  $a_{jk}$  es el coeficiente de correlación parcial entre  $j$  y  $k$ . Lo que trata de medir este índice es que haya fuerte correlación simple entre las variables, por sí misma, y que además el efector de correlación entre dos variables no se deba al resto de las otras variables que es lo que mide precisamente el coeficiente de correlación parcial. Es decir la situación ideal que este último coeficiente no perturbe a los coeficientes lineales, de modo que un índice KMO próximo a 1 es óptimo. Está comúnmente aceptado que:

- Si  $KMO < 0.5$  no resultaría aceptable para hacer un análisis factorial
  - Si  $0.5 < KMO < 0.6$  grado de correlación medio, y habría aceptación media en los resultados del análisis factorial.
  - Si  $KMO > 0.7$  indica alta correlación y, por tanto, conveniencia de un análisis factorial.
- **El índice MSA para cada variable.** Este índice es similar al índice KMO pero está referido a cada variable, de modo que su definición es

$$MSA(j) = \frac{\sum_{j \neq k} r_{jk}^2}{\sum_{j \neq k} r_{jk}^2 + \sum_{j \neq k} a_{jk}^2}$$

Si el valor del  $MSA(j)$  fuera pequeño, no se aconsejaría el análisis factorial. Por el contrario, valores próximos a 1 indicarían que la variable  $x_j$  es adecuada para incluirla con el resto en un análisis factorial. En muchas ocasiones, se eliminan las variables con índice  $MSA$  muy bajo.

## 5. Extracción de los factores

Vamos a realizar algunas simplificaciones al modelo (1). Vamos a suponer que las variables  $x_j$  están estandarizadas. De tal forma que el modelo (1) queda como

$$\mathbf{x} = \mathbf{\Lambda f} + \mathbf{u}$$

De otra forma

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_{11} f_1 + \lambda_{12} f_2 + \cdots + \lambda_{1m} f_m + u_1 \\ &\vdots \\ x_i &= \lambda_{i1} f_1 + \lambda_{i2} f_2 + \cdots + \lambda_{im} f_m + u_i \\ &\vdots \\ x_p &= \lambda_{p1} f_1 + \lambda_{p2} f_2 + \cdots + \lambda_{pm} f_m + u_p \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$V[x_i] = 1 = \lambda_{i1}^2 + \lambda_{i2}^2 + \cdots + \lambda_{im}^2 + V[u_i] \quad (4)$$

- $\lambda_{ih}^2$  representa la proporción de varianza total de la variable  $x_i$  explicada por el factor  $h$ .
- $\lambda_{i1}^2 + \lambda_{i2}^2 + \cdots + \lambda_{im}^2$  es la comunalidad de la variable  $x_i$  y representa la proporción de varianza que los distintos factores en su conjunto explican de la variable  $x_i$ . Es, por tanto, la parcela de esa variable que entra en contacto con el resto de variables. Varía entre 0 (los factores no explican nada de la variable) y 1 (los factores explican el 100% de la variable).
- $V[u_i]$  es lo que se llama especificidad y representa la contribución del factor único a la variabilidad total de  $x_i$ .

Si sumamos a través de  $i = 1, \dots, p$  las ecuaciones en (1), obtenemos

$$p = \sum_{i=1}^p \lambda_{i1}^2 + \cdots + \sum_{i=1}^p \lambda_{ih}^2 + \cdots + \sum_{i=1}^p \lambda_{im}^2 + \sum_{i=1}^p V[u_i] \quad (5)$$

- La cantidad  $g_h = \sum_{i=1}^p \lambda_{ih}^2$  representa la capacidad del factor  $h$  para explicar la varianza total de las variables. Como las variables originales están estandarizadas, la varianza total es igual a  $p$  y  $g_h / p$  representaría el porcentaje de varianza total atribuible al factor  $h$ . Es decir

$$1 = \frac{g_1}{p} + \cdots + \frac{g_h}{p} + \cdots + \frac{g_m}{p} + \frac{\sum_{i=1}^p V[u_i]}{p}$$

- Los valores  $g_h$  son los autovalores de la matriz de correlación  $\mathbf{R}$  de la matriz  $\mathbf{X}$ . En efecto, supongamos que queremos calcular los componentes principales de las variables estandarizadas  $x_i$ , entonces estos componentes principales se obtienen calculando los vectores y valores propios de la matriz de correlación  $\mathbf{R}$ . Ahora si las raíces caracterís-

tics de esta matriz las llamamos  $\xi_i$ , sabemos que

$$\sum_{i=1}^p \xi_i = \text{traza}(R) = p \quad (6)$$

donde la proporción de la variación explicada por  $\xi_i$  es precisamente  $\xi_i / p$ . Observe las ecuaciones (5) y (6), donde la aproximación es evidente si los  $g_h$  lo explican todo (o equivalentemente  $V[u_i] \approx 0$ ).

- De otra forma, con los autovalores obtenidos por  $\mathbf{R}$ , calculamos los autovectores asociados construyendo una matriz ortogonal  $\mathbf{A}$ , entonces la matriz de los valores de los componentes es

$$\mathbf{Z} = \mathbf{X}\mathbf{A}$$

y como  $\mathbf{A}$  es ortogonal entonces

$$\mathbf{X} = \mathbf{Z}\mathbf{A}^t$$

esto permite reconstruir las variables observadas originales como

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}z_1 + \cdots + a_{m1}z_m + \cdots + a_{p1}z_p \\ &\vdots \\ x_i &= a_{1i}z_1 + \cdots + a_{mi}z_m + \cdots + a_{pi}z_p \\ &\vdots \\ x_p &= a_{1p}z_1 + \cdots + a_{mp}z_m + \cdots + a_{pp}z_p \end{aligned}$$

sin embargo si consideramos solamente  $m$  componentes, el sistema anterior se puede escribir como

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}z_1 + \cdots + a_{m1}z_m + u_1 \\ &\vdots \\ x_i &= a_{1i}z_1 + \cdots + a_{mi}z_m + u_i \\ &\vdots \\ x_p &= a_{1p}z_1 + \cdots + a_{mp}z_m + u_p \end{aligned}$$

Y de esta forma hemos obtenido el modelo

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1i} & \cdots & a_{mi} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1p} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix}$$

que si lo comparamos con el modelo (1) se tiene que

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1i} & \cdots & a_{mi} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1p} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix}$$

es la matriz de "carga" y

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}$$

son los factores. De otra forma, lo que se propone es que al análisis factorial (que es la estimación del modelo 1), se puede realizar (extraer) mediante el cálculo de los componentes principales.

- Sin embargo, hay que hacer una advertencia. Si bien es cierto que las variables  $u_i$  no están correlacionadas con las variables  $z_1, \dots, z_m$ , como lo exige el modelo factorial, también es cierto que las variables  $u_i$  contienen a las variables  $z_{m+1}, \dots, z_p$ , de tal forma que en esta representación las variables  $u_1, \dots, u_p$  estarán correlacionadas.
- No obstante lo anterior, si existen  $m$  componentes principales que explican una proporción muy alta de la variabilidad, de manera que la variabilidad específica de las variable  $u_i$  es pequeña, el análisis factorial y el análisis de componentes principales sobre la matriz de correlaciones darán resultados similares.