Problemas de modelos discretos probabilísticos

Eliseo Martínez

1. Aplicación de la geométrica

1.1 Problema

Una empresa trasnacional produce un determinado artículo. El departamento de calidad clasifica el artículo en cinco categorías de calidad: A, B, C, D y F, donde A es la categoría de excelencia, y F la menos buena. La manufacturación de cada artículo es un proceso independiente. Estudios de muestreo por el mismo departamento han determinado que las probabilidades de calidad de un artículo son las siguientes:

$$\Pr\{A\} = 8/36;\ \Pr\{B\} = 6/36;\ \Pr\{C\} = 8/36;\ \Pr\{D\} = 10/36;\ \Pr\{F\} = 4/36$$

Una empresa que compra los artículos anualmente tiene la siguiente política de compra: Revisa cada artículo en forma secuencial de tal manera que, si el primer artículo tiene la categoría A entonces se detiene el proceso de revisión y se dice que *la producción ha sido exitosa*, y en consecuencia compra una gran partida; si el primer artículo que revisa es de la categoría F, entonces considera que *la producción no ha sido exitosa*, y en consecuencia no compra. Ahora si el primer artículo no está en la primera (A) ni última categoría (F), continua revisando artículo tras artículo hasta encontrar uno de la misma categoría que el primero o uno de la categoría A, antes que le aparezca un artículo F. Si ocurre lo primero, la empresa declara que la *producción ha sido exitosa* también, y en consecuencia compra una partida, en caso contrario, declara que la *producción no ha sido exitosa*, y en consecuencia no compra.

¿Cuál es la probabilidad de tener una *producción exitosa*?

1.2 Solución

1.2.1 Conceptualización de los sucesos involucrados.

El alumno debe ser capaz de identificar los sucesos atingentes al problema. De alguna manera y con notaciónes que estime conveniente deberá determinar lo siguiente:

E : la producción de la empresa ha sido exitosa

donde

$$E = E_1 \cup E_s$$

siendo

E_1 : la primera revisión fue exitosa

$$E_s \quad : \quad \text{se obtuvo éxito en las subsecuentes revisiones}$$

El segundo suceso, E_s, es el de un grado de dificultad, por lo menos se deberá asignar puntaje si ”esbozan” alguna trayectoria para ese suceso, por ejemplo $B; D; D; B$, cuatro revisiones hasta conseguir un éxito, etcétera.

1.2.2 Cuantificación de las primeras probabilidades

El alumno debe saber que la solución al problema pasa por el cálculo de

$$\Pr\{E\} = \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_s\} = 8/36 + \Pr\{E_s\}$$

En esta etapa el alumno debe comprender, a lo menos intuir, que el cálculo de $\Pr\{E_s\}$ dependerá de las calidades A, B, C y D del artículo. Por lo tanto deberá introducir el concepto de probabilidad condicional, esto significa que de alguna manera deberá manifestar lo siguiente:

Si en la primera revisión se obtuvo $X \in \{B; C; D\}$, entonces la manera de detener el proceso de revisión es que aparezca un artículo A ó X, y la aparición de un artículo A ó X ocurre con probabilidad

$$\Pr\{X\} + 8/36$$

y la otra forma de deterner el proceso de revisión es que aparezca un artículo F, que ocurre con probabilidad

$$4/36$$

de lo contrario continua el proceso de revisión, es decir que no aparezca X, ni A, ni F, y esto ocurre con probabilidad

$$1 - 4/36 - \Pr\{X\} - 8/36$$

Además, deberá deducir que la probabilidad de $\Pr\{E_s\}$ se calcula mediante

$$\Pr\{E_s\} = \sum_{X \in \{A;B;C\}} \Pr\{E_s \mid X\} \Pr\{X\} \tag{1}$$

De manera que se llega al momento crucial en que el alumno deberá proponer el modelo de probabilidad para este problema.

1.2.3 Presentación del modelo de probabilidad geométrico.

El alumno deberá ser capaz de concluir, que toda vez que ocurra que en la primera revisión que $X \in \{B; C; D\}$ que el proceso ”puede” detenerse, en esta segunda parte, en alguna revisión n, de manera que la probabilidad de detener el proceso de revisión en n está dado por

$$(1 - 4/36 - \Pr\{X\} - 8/36)^{n-1} \cdot (4/36 + \Pr\{X\} + 8/36)$$

Ahora bien, el proceso se detendrá con producción exitosa en la n-ésima revisión dado que ocurrió $X \in \{B; C; D\}$ con probabilidad

$$(1 - 4/36 - \Pr\{X\} - 8/36)^{n-1} \cdot (\Pr\{X\} + 8/36)$$

Por lo tanto, la probabilidad de detener el proceso con producción exitosa en algún momento, dado que ocurrió $X \in \{B; C; D\}$, está dado por

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - 4/36 - \Pr\{X\} - 8/36)^{n-1} \cdot (\Pr\{X\} + 8/36) = \frac{\Pr\{X\} + 8/36}{4/36 + \Pr\{X\} + 8/36}$$

Nota: en el cálculo anterior debe reconocer la serie geométrica.

1.2.4 Últimas cuantificaciones

Bajo lo establecido en (1), el alumno deberá realizar los siguientes cálculos

$$\Pr\{E_s\} = \sum_{X \in \{B;C;D\}} \frac{\Pr\{X\} + 8/36}{4/36 + \Pr\{X\} + 8/36} \cdot \Pr\{X\}$$

esto es

$$\Pr\{E_s\} = \frac{7}{54} + \frac{8}{45} + \frac{5}{22} = 0.534680$$

De manera que la probabilidad de obtener una producción exitosa es

$$\Pr\{E\} = \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_s\} = 0.756902$$

2. Una aplicación de Montecarlo

2.1 Problema

Suponga que se construye una circunferencia en el interior de un cuadrado, de lado $1[cms.]$, centrada de manera simétrica, y de radio $1/2$ $[cms.]$.

(a) Se generan dos números aleatorios, x e y de manera independientes y cada uno contenido en el intervalo $[0; 1]$. ¿Cuál es la probabilidad de que el punto $(x; y)$ se encuentre en el interior de la circunferencia?.

(b) Suponga ahora que se generan tres puntos aleatorios contenido cada uno de ellos en el intervalo $[0; 1]^2$, de la misma forma anterior. Se pide calcular la probabilidad de que dos de ellos, a lo menos, estén contenidos en el interior de la circunferencia..

(c) Suponga ahora que se construye una figura en cualquier parte del interior de un rectángulo cuadrado de área A, y esta figura tiene un área $\Delta\tau$. Supongamos que se generan N puntos de la forma $(x; y)$ de manera independiente que están en el interior de A. Determinar un modelo para calcular la probabilidad de que n puntos de los N, $(n < N)$, se encuentren en el interior de la región de área $\Delta\tau$

(d) Suponga que $\Delta\tau = 0.01 \cdot A$, y que $N = 10^4$. Entregue un método para calcular, sin necesariamente calcular si es que su calculadora no tiene la capacidad de cálculo, la probabilidad de encontrar 1000 puntos en el interior del área $\Delta\tau$

2.2 Solución

(a) El punto generado (x, y) puede "caer" en el interior de la circunferencia o fuera de ella, el área de la circunferencia es $\pi/4$, y el área del cuadrado es 1, de manera que una medida de incertidumbre es $\pi/4$

(b) Cada punto, de los tres generados en forma independiente tendrán la misma probailidad de estar en el interior de la circunferencia, de manera que interpretamos a $p_0 = \pi/4$ como la probabilidad de éxito al caer dentro de la circunferencia, de modo que la probabilidad pedida es

$$\binom{3}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$

(c) Para un punto generado aleatoriamente dentro de la región A, la probabilidad que caiga dentro de la figura de área $\Delta\tau$, será igual a $p = \Delta\tau/A$. De manera que está p es la probabilidad de "éxito". En consecuencia la probabilidad pedida es

$$\binom{N}{n}\left(\frac{\Delta\tau}{A}\right)^n\left(1-\frac{\Delta\tau}{A}\right)^{N-n}$$

(d) Con el modelo anterior se tiene que

$$\binom{10^4}{1000}(0.01)^{1000}(1-0.01)^{9000}$$

y esta expresión la aproximamos mediante una Poisson de parámetro $\lambda = p \cdot N = 0.01 \cdot 10^4 = 100$. Esto es

$$\frac{100^{1000}}{1000!} \cdot e^{-100} \doteq 0$$

3. El problema de la carretera

3.1 Problema

Suponga que el número de vehículos que se puede encontrar en una carretera de longitud x [kilómetros] esta dada por una distribución de Poisson de parámetro λx, con $\lambda = 20$ [vehículos por cada 10 kilómetros]

(a) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar a lo menos un vehículo en un trecho de la carretera de longitud 1 kilómetro.

(b) Suponga tres segmentos de carretera no traslapados, de longitud dos kilómetros cada uno, ¿cuál es la probabilidad de encontrar, en dos de estos tres segmentos, exactamente dos vehículos?

(c) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar un vehículo en un segmento de la carretera de longitud 100 metros?

(d) un vehículo, en promedio, mide $L = 6$ [metros] (entre autos, camionetas y camiones con aclopados), en el lenguaje del tránsito vehícular se dice que hay un "taco" cuando la densidad vehícular, ρ, esto es el número de vehículos por unidad de longitud, se aproxima a $1/L$. ¿Demuestre que la probabilidad de que en un segmento de carretera de longitud 1 kilómetro ocurra un "taco" es practicamente nula?

3.2 Solución

(a) Normalizando λ a la unidad de 1 kilómetro, se tiene que $\lambda = 2$ [vehículo por cada 1 kilómetro], de modo que la probabilidad de encontarr k vehículos en un segmento de carretera x está dada por

$$P_k(x) = \frac{(\lambda x)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda x}$$

En particular, la probabilidad de encontrar a lo menos un vehículo en un segmento de longitud 1 kilómetro es

$$1 - P_0(1) = 1 - e^{-2} = 0.864664$$

(b) La probabilidad de encontrar excatamente dos vehículos en un segmento de carretera de longitud 2 kilómetros está dada por

$$P_2(2) = \frac{4^2}{2!} \cdot e^{-4} = 0.146525$$

Llamemos a esta probabilidad $p = 0.146525$, y la interpretamos como probabilidad de éxito. Luego la probabilidad de encontrar en dos de estos tres segmentos de carretera no traslapados dos vehículos está dada por la binomial

$$\binom{3}{2} p^2(1-p) + \binom{3}{3} p^3 = 0.0581170$$

(c) En este caso $x = 100 \text{ metros} = 0.1 \text{ kilómetros}$, de modo que la probabilidad de encontrar un vehículo en un segmento de carretera de longitud 100 metros está dada por

$$1 - P_0(0.1) = 1 - e^{-0.2} = 0.181269$$

(d) Si ocurre que la densidad vehícular $\rho = 1/L = 1/6$ [1 vehículo por cada 6 metros] hay taco, de manera que, si consideramos a n como el número de vehículos en la carretera de longitud 1000 metros, entonces habrá taco si

$$\frac{n}{1000} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow n \doteq 166$$

Luego se debe calcular la probabilidad

$$\sum_{k=166} \frac{2^k}{k!} \cdot e^{-2}$$

que es practicamente cero.

4. Comentarios

4.1 Sobre el primer problema

Es un problema que si bien se focaliza en un solo modelo discreto, la geométrica, utiliza en forma integral varios conceptos de fundamentos, como probabilidad condicional, el teorema de la probabilidad completa, probabilidad de sucesos disjuntos, etcétera. Se requiere un alto grado de abstracción. Aquellos alumnos que han realizado el modelo del ”crap” están en condiciones de realizar este problema con éxito. Alto grado de dificultad, toda vez que no hay antecedentes similares en nuestras guías. Si se reconoce que el modelo de solución es la geométrica, se estima en media hora el desarrollo y los cálculos.

4.2 Sobre el cuarto problema

Un problema eminentemente ”teórico”, fundamentado en la definición ”frecuentista” de la probabilidad. Para quien no reconozca la ”probabilidad de éxito” no podrá ingresar al desarrolo del problema. Sin embargo si desarrolla (a) y (b), podrá desarrollar los dos restantes y a la vez ”aprender” a generalizar en matemáticas. Se espera que en la parte (d) utilice la aproximación de Poisson. Si se tiene claro el concepto frecuentista de probabilidad, el problema se desarrolla en 7 a 10 minutos, de lo contrario no se realizará. Es posible que en la parte (a) pierdan tiempo con aplicar una densidad uniforme conjunta, lo cual también conduce al resultado, pero con mayor dificultad. Es un problema sencillo, sin antecedentes en las guías de ejercicios.

4.3 Sobre el quinto problema

Es un problema de aplicación directa de Poisson, con binomial, donde la dificultad radica en la utilización correcta del parámetro de Poisson. Se espera que los alumnos aventajados realicen la demostración en la parte (d). Existen ciertos antecedentes en las guías. Nivel de dificultad medio. Tiempo aproximado en el desarrollo y los cálculos para quien ha estudiado: 25 minutos.

5. Jerarquización en grado de dificultad

Propongo la siguiente jerarquización, en todo caso relativa, de menor a mayor en grado de dificultad de los problemas propuestos:

1 Tercer problema
2 Segundo problema
3 Cuarto problema
4 Quinto problema
5 Primer problema