Modelos malthusiano y logístico para procesos de crecimiento en Biología

Eliseo Martínez y Douglas Fuenteseca

4 de septiembre de 2017

Resumen

Estos apuntes están enmarcados en el Proyecto de Docencia "Hacer y corregir en el proceso de evaluación", 2017, y presenta aplicaciones de cierta profundidad en modelos biológicos de crecimiento de tiempo discreto y sin mucha parafernalia en las herramientas matemáticas que se usan.

1. Modelo malthusiano

Supongamos que P_n denota el tamaño de una población en en tiempo n, que puede ser años por ejemplo. Y supongamos además que la tasa de natalidad está dada por un valor constante[1] de b y la tasa de mortandad es d también constante, y con esto decimos que tanto las personas que nacen y mueren en un determinado período (en nuestro caso año) son proporcionales al tamaño de la población del período anterior, esto es

$$P_{n+1} = P_n + b \cdot P_n - d \cdot P_n \tag{1}$$

Y esta ecuación nos dice lo siguiente: la población que habrá en el período $n+1$ será igual a la población del período n más los que nacieron (y que son proporcionales a la población anterior) menos los que fallecen (que también son proporcionales a la población anterior). La ecuación (1) puede simplificarse a

$$P_{n+1} = (1 + (b - d)) \cdot P_n \tag{2}$$

Si suponemos que $b > d$, esto es hay más gente que nace que la que muere, y hacemos $s = b - d$ entonces $\lambda = 1 - s$ es la tasa de crecimiento de la población (y observe que es mayor que 1), y la ecuación (2) queda como

$$P_{n+1} = \lambda \cdot P_n \tag{3}$$

[1]La tasa de natalidad se pide en números de nacidos por cada 1000 personas por año, a modo de ejemplo una tasa de natalidad en la población humana puede ser de $0,017$ entendiendo con esto que al año por cada 1000 personas nacen 17 personas vivas

Con el modelo (3) usted está en condiciones de estimar la población de la ciudad de Antofagasta para el año 2017. Observe que el modelo dado en (3) se puede considerar como un modelo perteneciente a la recta

$$y = \lambda \cdot x$$

que es la recta que pasa por el origen de pendiente λ. Sin embargo este modelo lo vamos a desarrollar en forma dinámica (que evoluciona a través del tiempo n). En efecto, supongamos que el año inicial lo codificamos por $n = 0$ [2], y queremos saber lo que sucederá en $n = 1$ entonces

$$P_1 = \lambda \cdot P_0$$

Una vez obtenida la estimación para el año P_1 podemos estimar la población en el año $n = 2$, esto es

$$P_2 = \lambda \cdot P_1 = \lambda \cdot \lambda \cdot P_0 = \lambda^2 \cdot P_0$$

Si queremos estimar la población para el año $n = 3$, tenemos entonces

$$P_3 = \lambda \cdot P_2 = \lambda \cdot (\lambda^2 \cdot P_0) = \lambda^3 \cdot P_0$$

La regularidad que emerge es evidente de modo que podemos obtener el modelo de crecimienton para cualquier año n

$$P_n = \lambda^n \cdot P_0 \tag{4}$$

La ecuación (4) es un modelo exponencial o modelo de Malthus.Aplique este modelo para resolver el siguente problema: Si la tasa de natalidad en Antofagata es de $b = 0,017$ y la tasa de mortalidad es de $d = 0,007$, y se supone que estas tasas se mantendrán constante por mucho tiempo, estime la población de Antofagasta en el año 2032.

2. Modelo logístico

El modelo malthusiano al parecer tiene un reproche, que las tasas de nacimiento y mortandad son constantes, y de este modo el factor λ^n crecerá indefinidamente si n crece mucho, de modo que debemos ponerle un freno a este crecimiento, y esto significa que la propia población, por algún mecanismo regulará su crecimiento.

Esta vez la tasa de natalidad no será constante sino que dependerá del tamaño de la población, esta vez supondremos que la tasa de natalidad b del modelo dado en (1) ya no es constante y dependerá del tiempo (y en consecuencia de la población) de la siguiente forma

$$b(n) = \alpha - \beta \cdot P_n \tag{5}$$

[2] Piense usted que el tiempo $n = 0$ es el 2017, de modo que el año 2019 corresponde a $n = 2$

Esta ecuación está signficando que a una tasa α de natalidad se le está respando un factor que es proporcional a la población de ese momento, y de todas maneras los nuevos nacimientos en el año $n+1$ serán de

$$b(n) \cdot P_n$$

De manera análoga la tasa de mortalidad dejará de ser constante, y puede ser modelada por

$$d(n) = \gamma + \delta \cdot P_n \tag{6}$$

Y esto significa que a la tasa de mortandad "natural"γ se le incrementará un factor que será proporcional a la población en ese momento, de modo que los fallecidos para el año $n+1$ serán

$$d(n) \cdot P_n$$

En consecuencia la población para el año $n+1$ estará dada por

$$P_{n+1} = P_n + b(n) \cdot P_n - d(n) \cdot P_n$$

Utilizando (5) y (6), obtenemos la expresión

$$P_{n+1} = P_n + (\alpha - \beta \cdot P_n)P_n - (\gamma + \delta \cdot P_n)P_n \tag{7}$$

Factorizando convenientemente obtenemos

$$P_{n+1} = P_n(1 + \alpha - \gamma)\big[1 - \frac{\beta + \delta}{1 + \alpha - \gamma} P_n\big] \tag{8}$$

Observemos que el primer factor de la derecha de la ecuación (8), esto es $P_n(1+\alpha-\gamma)$ corresponde al modelo de Malthus donde α y γ son las correspondientes tasas de nacimiento y muerte *naturales* de la población, el el segundo factor, esto es $\big[1 - \frac{\beta+\delta}{1+\alpha-\gamma} P_n\big]$, es el factor que le pone el *freno* al crecimiento exponencial. Supongamos ahora que a medida que el tiempo pasa la población se estabiliza, digamos que para un n grande, que en lenguaje matemático se escribe $n \to \infty$, y si llamamos P_∞ a esta población estabilizada, entonces debiera ocurrir la ecuación (8) para este valor, es decir

$$P_\infty = P_\infty(1 + \alpha - \gamma)\big[1 - \frac{\beta + \delta}{1 + \alpha - \gamma} P_\infty\big]$$

Despejando P_∞, obtenemos el valor de la población estabilizada en un tiempo grande, esto es

$$P_\infty = \frac{\alpha - \gamma}{\beta + \delta} \tag{9}$$

Observando la Figura 1 vemos que la población se estabiliza en

$$\frac{\alpha - \gamma}{\beta + \delta} = \frac{0{,}017 - 0{,}007}{0{,}001 + 0{,}001} = 50$$

Podemos notar que el modelo logístico contiene al modelo de Malthus como caso particular. En efecto, si hacemos $\beta = \delta = 0$ en (8) obtenemos la ecuación (3).

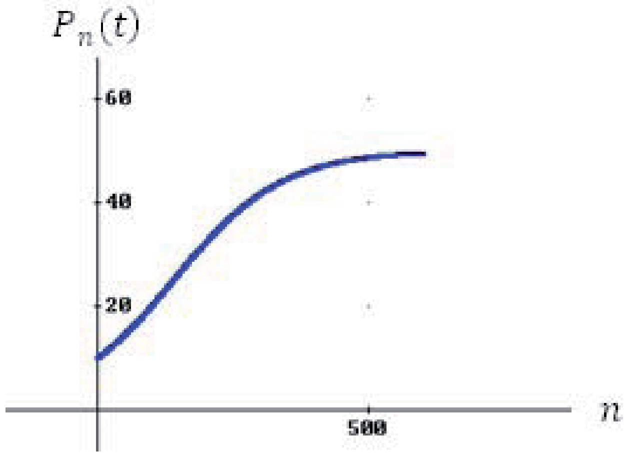

Figura 1: Modelo logístico con parámetros $\alpha = 0{,}017$, $\beta = 0{,}0001$, $\gamma = 0{,}007$, y $\delta = 0{,}0001$