# Tercer Trabajo de Cálculo Numérico

Eliseo Martínez

14 de noviembre de 2022

**Resumen**

El desarrollo del problema tendrá un 1 si está corectamente resuelto y un 0 si está mal desarrollado, o si está incompleto, o tuvo un error de cálculo. Si se tiene un 0 en cualquier item el trabajo se considera $R$, y debe ser enmendado por el alumno. Si todos los items tienen un 1 el trabajo se califica con $A$. Las respuestas deben ser entregadas en hojas manuscritas y puestas convenientemente en su archivador junto al trabajo anterior y su revisión (si corresponde). Recuerde que en la carátula externa debe ir el nombre del alumno, su carrera y el nombre de la asignatura. Para cada problema se entrega la rúbrica o estándares que se evaluará. Los gráficos los puede realizar con un software matemático y traspasarlo a su informe manuscrito de manera adecuada según la rúbrica exigida para cada problema.

## 1. Cables eléctricos e integración numérica

Sabemos que el propio cable conductor de electricidad ofrece una resistencia al flujo de corriente. La constante de resistencia de un resistor (en particular del cable conductor), que se denota por la letra **R** y se mide en *Ohms* ($[\Omega]$), depende, auque no exclusivamente, de la sección del cable que en este estudio supondremos circular.
La medición utilizada en USA es la unidad AWG, siglas correspondientes a las iniciales de la frase en inglés *American Wire Gauge*, por lo que significa calibre de alambre americano.
Esta unidad no es unidad de medida de longitud sino de "pasos"de manufacturación, y fue inventada en 1857, y consiste en el número de pasos a realizar por un proceso de estiramiento, que suponemos patentado, que consiste en adelgazar al alambre, partiendo del alambre más grueso y degradando hasta 39 niveles más delgados. Nosotros vamos a considerar 30 niveles de AWG.
La tabla de conversión de nivel AWG a dametros en ($mm$) y su respectiva área de sección circular se puede consultar en la siguiente URL:

https://equivalencias.top/equivalencia-awg-mm2/

Como se puede observar esta tabla es discreta, esto es su dominio es discreto, a saber los treinta primeros números naturales. Se han propuesto buenas funciones

de modelación, considerando esta vez como dominio real el intervalo cerrado $[0, \infty]$.
Aquí se proponen la siguientes funciones que realizan la conversión de la unidad AWG al diámetro en unidades de milímetros ($mm$)

$$AWG_1(x) = 25{,}4 \cdot 0{,}460 \cdot \left(\frac{57}{64}\right)^{x+3} \tag{1}$$

y la función:

$$AWG_2(x) = 25{,}4 \cdot 0{,}005 \cdot 92^{\frac{36-x}{39}} \tag{2}$$

Sobre este tipo de funciones trabajaremos en la tercera evaluación.

# 2. Interrogantes para el primer problema

1. ¿Cuál de las dos funciones, $AWG_1$ y $AWG_2$ realiza una mejor aproximación para la conversión del sistema $AWG$ a la unidad diametro en $[mm]$ de los cables?

2. Calcule, para ambas funciones, esta vez definida en el intervalo real $[0, 30]$ el polinomio de Taylor de grado 3 en torno al punto $(a+b)/2$ que se le indica en la distribución de datos junto a su nombre.

3. Realice las siguientes integrales mediante el método numérico (del trapecio) enseñado en clases:

$$\int_a^b AWG_1(x)\ dx \quad ; \quad \int_a^b AWG_2(x)\ dx$$

   y compárelas con las integrales de los polinomios de Taylor de grado 3, anteriores. Los datos para $a$ y $b$ se encuentra junto a su nombre en la distribución de datos.

## 2.1. Rúbrica para las anteriores interrogantes

Se evaluará lo siguiente:

1. Debe realizar una tabla donde en la primera columna deben ir las unidades $AWG$, en la segunda columna los diámetros y en la tercera y cuarta columna las evaluaciones de las funciones de conversión a **milímetros**, con el debido título de encabezamiento y utilice tres cifras decimales.

2. El polinomio de Taylor debe estar escrito de manera compacta y sin potencias, y a lo más los coeficientes con tres decimales.

3. Debe realizar en un mismo plano cartesiano las dos funciones de conversión y el polinomio de Taylor pedido. Los ejes deben estar debidamente definidas en sus unidades respectivas.

4. Las tablas de integración deben estar correctamente detalladas. Y se pedirán dos tablas. Una para una subdivisión con $h = 0{,}1$ y otra con $h = 0{,}01$. Y bajo cada tabla la evaluación de cada integral y compararla con la integral del polinomio de Taylor.

## 3. Funciones de densidad e integración

Supongamos que tenemos una función de densidad $f(x)$ con $0 \leq x < \infty$, es decir que satisface

$$f(x) \geq 0 \ \ ; \ \ \int_0^\infty f(x)\ dx = 1 \tag{3}$$

A modo de ejemplo tenemos la función de densidad exponencial

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x} \ ; \ \ x \geq 0 \ , \ \alpha > 0 \tag{4}$$

Otro ejemplo de función de densidad con soporte positivo es la función de densidad log-normal de parámetros $\mu$ y $\sigma$, con este último positivo, definida por

$$l(x) = \frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}}\ exp\Big( -\frac{ln(x)-\mu}{2\sigma^2}\Big) \ ; \ \ x > 0 \ , -\infty < \mu < \infty \ ; \sigma > 0 \tag{5}$$

Un tercer ejemplo es la densidad $\chi$-cuadrado con $k$ un nmero natural [1], definida por

$$\chi(x) = \frac{(\frac{1}{2})^{\frac{k}{2}} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2})} \ ; \ x \geq 0 \ ; \ k \in \{1, 2, ...\} \tag{6}$$

donde $\Gamma(z)$ es la función gamma definida por

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\ dt \tag{7}$$

Supongamos que $f(x)$ es una densidad con soporte positivo, se define la función

$$h_f(x, \mu, \delta_1, \delta_2) = \frac{1}{\delta_1 + \delta_2}\Big[ f\Big(\frac{-(x-\mu)}{\delta_1}\Big) I_{(-\infty,\mu]}(x) + f\Big(\frac{(x-\mu)}{\delta_2}\Big) I_{[\mu,\infty)}(x)\Big] \tag{8}$$

con $\delta_1$ y $\delta_2$ positivos, $-\infty < x < \infty$, $\mu \in (-\infty, \infty)$. Donde

$$I_A = \begin{cases} 1 \ si \ x \in A \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Se puede verificar que la función dada en (8) es una función de densidad. Y sobre esta función realizaremos trabajo de integración numérica.

[1] Nmero $k$ llamado "grados de libertad"

# 4. Interrogantes para el segundo problema

- Forme la densidad dada en (8), con los parámetros indicados junto a su nombre en la lista de distribución de datos, que sea generada por la función de densidad exponencial, dada en (4), de parámetro también indicado en la lista de datos junto a su nombre.
- Calcule la integral

$$\int_c^d h_f(x)dx$$

  conforme a los valores de $c$ y $d$ que se le otorga en la lista de datos junto a su nombre, mediante la técnica del trapecio.
- Realice la gráfica de ambas funciones en un mismo plano cartesiano.

## 4.1. Rúbrica para el segundo problema

Se evaluará lo siguiente:

1. La función resultande $h_f(x)$ debe ser descrita en forma compacta, y comprobar que efectivamente la integral en $(-\infty, \infty)$ vale 1.
2. Las tablas de integración numérica deben estar correctamente detalladas. Y se pedirán dos tablas. Una para una subdivisión con $h = 0{,}1$ y otra con $h = 0{,}01$. Y bajo cada tabla la evaluación de cada integral, con tres decimales

Fecha de recepción del trabajo: hasta el 23 de noviembre del 2022.
datos: https://intranetua.uantof.cl/estudiomat/numerico/2022/datostercera.html