Densidades y cálculo numérico

Eliseo Martínez

November 10, 2022

Abstract

Se estudia la relación un tipo de función de densidad que será la extensión de una densidad definida en un soporte positivo. Se utilizará esta función de densidad para ejercitar procesos de integración numérica.

1 Algunas densidades con soporte positivo

Supongamos que tenemos una función de densidad $f(x)$ con $0 \leq x < \infty$, es decir que satisface

$$f(x) \geq 0 \;\; ; \;\; \int_0^\infty f(x)\; dx = 1 \tag{1}$$

A modo de ejemplo tenemos la función de densidad exponencial

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x} \;\; ; \;\; x \geq 0 \;,\; \alpha > 0 \tag{2}$$

Otro ejemplo de función de densidad con soporte positivo es la función de densidad log-normal de parámetros μ y σ, con este último positivo, definida por

$$l(x) = \frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}}\; exp\Big(- \frac{ln(x) - \mu}{2\sigma^2}\Big) \;\; ; \;\; x > 0 \;, -\infty < \mu < \infty \;; \sigma > 0 \tag{3}$$

Un tercer ejemplo es la densidad χ-cuadrado con k un número natural [1], definida por

$$\chi(x) = \frac{(\frac{1}{2})^{\frac{k}{2}} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2})} \;\; ; \; x \geq 0 \; ; \; k \in \{1, 2, ...\} \tag{4}$$

donde $\Gamma(z)$ es la función gamma definida por

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\; dt \tag{5}$$

[1] Número k llamado "grados de libertad"

2 Una nueva densidad en $(-\infty, \infty)$

Supongamos que $f(x)$ es una densidad con soporte positivo, se define la función

$$h_f(x, \mu, \delta_1, \delta_2) = \frac{1}{\delta_1 + \delta_2}\Big[f\Big(\frac{-(x-\mu)}{\delta_1}\Big)I_{(-\infty,\mu]}(x) + f\Big(\frac{(x-\mu)}{\delta_2}\Big)I_{[\mu,\infty)}(x)\Big] \quad (6)$$

con δ_1 y δ_2 positivos, $-\infty < x < \infty$, $\mu \in (-\infty, \infty)$. Donde

$$I_A = \begin{cases} 1 \; si \; x \in A \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Se puede verificar que la función dada en (6) es una función de densidad. Y sobre esta función realizaremos trabajo de integración numérica.

3 Interrogantes para una posible evaluación

Se puede pedir lo siguiente

- Para una determinada función $f(x)$, como las dadas en (2), (3), (4) u otras se puede pedir la aproximación numérica de la integral

$$\int_a^b h_f(x, \mu, \delta_1, \delta_2)\ dx$$

- Para la función $h_f(x)$ en algún punto x_0 se puede pedir el polinimio de-Taylor, $p_{n,x_0}(x)$, de cierto grado en las cercanías de ese punto y evaluar la integral

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} p_{n,x_0}(x)$$

- Realizar la gráfica de $h_f(x, \mu, \delta_1, \delta_2)$ y compararla con $p_{n,x_0}(x)$

References

https://doi.org/10.1080/02664763.2021.1959527