Estimación de una función cuadrática en mínimos cuadrados

Eliseo Martínez

26 de septiembre de 2022

Resumen

Se entrega la técnica de estimación mediante mínimos cuadrados para datos bidimensionales que se ajustará a una nube de puntos en el plano

$$\{(x_i, y_i; i = 1, ..., n\}$$

a una función cuadrática de la forma

$$y = ax^2 + bx + c$$

1. Las ecuaciones normales

Supongamos que tenemos la siguiente tabla de datos

$$\begin{pmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots \\ x_i & y_i \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{pmatrix}$$

De esta tabla se sospecha que los elementos x obedecen o se asemejan[1] a una función $y = ax^2 + bx + c$. De modo que el problema es encontrar los valores de a, b y c que mejor se ajusten, en algún sentido, al conjunto de datos. Esto significa que debemos encontrar los coeficientes de la función cuadrática de modo que al evaluar los x_i en la función $ax^2 + bx + c$ nos entregue un valor $\widehat{y}_i = ax_i^2 + bx_i + c$ que esté muy cercano al valor de y_i.
Y una exigencia es que la expresión

$$\sum_{i=1}^{n} (\widehat{y}_i - y_i)^2 \tag{1}$$

[1] Par esto se realiza una inspección gráfica mediante un gráfico de dispersión

sea mínima.
Observe que la expresión en (1) es una función que depende de los parámetros a, b y c, esto es

$$f(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2 \tag{2}$$

Y entonces nuestro objetivo es minimizar la función $f(a,b,c)$ dada en (2). Y esto se consigue mediante las derivadas parciales respecto de los parámetros e igualando a cero.
Derivando para cada variable, obtenemos:

$$\frac{\partial f(a,b,c)}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{n} (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)x_i^2 = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial f(a,b,c)}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)x_i = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial f(a,b,c)}{\partial c} = 2\sum_{i=1}^{n} (ax_i^2 + bx_i + c - y_i) = 0 \tag{5}$$

De estas ecuaciones distribuimos respecto el operador suma y despejamos convenientemente, nos queda el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^4 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{=1}^{n} x_i & n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i \end{pmatrix} \tag{6}$$

Resolviendo este sistema encontraremos los valores de modo que $f(a,b,c)$ obtenga un mínimo. Estos valores a, b y c se llaman los *estimadores en mínimos cuadrados*. El sistema dado en (6) son las *ecuaciones normales para el modelo cuadrático*