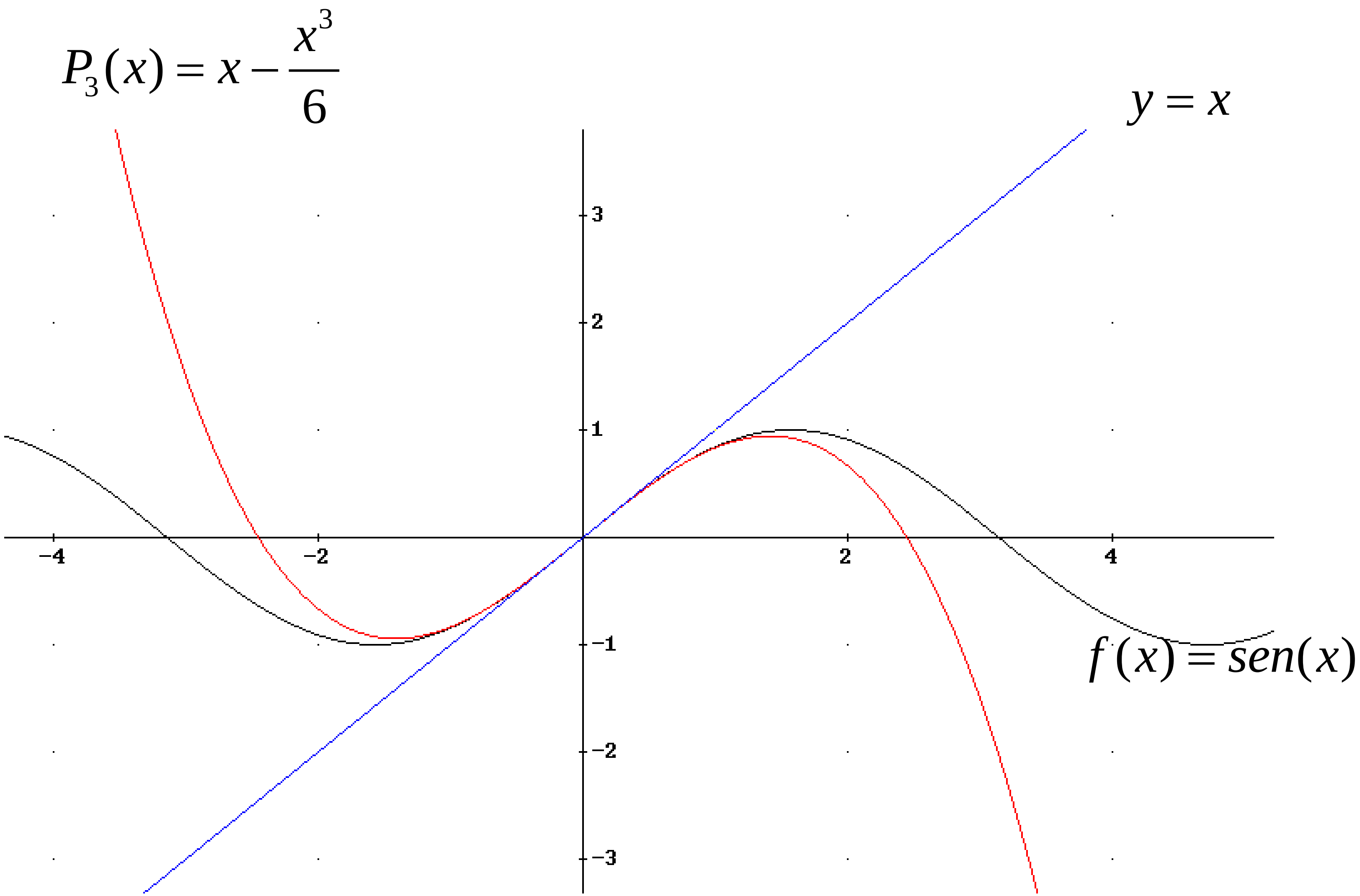
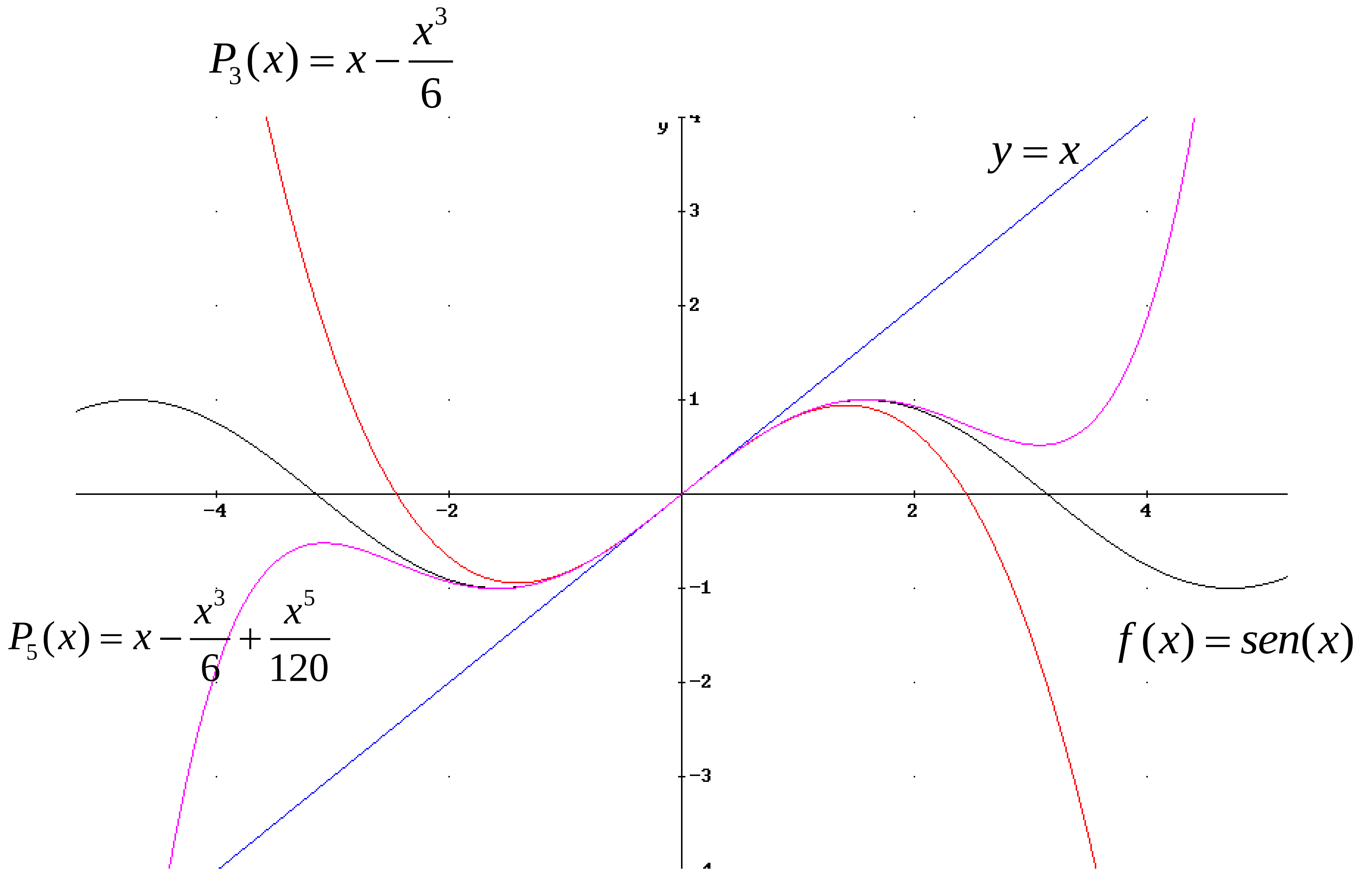

$P_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$
$y = x$
$f(x) = sen(x)$
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−2
2
4

x	$sen(x)$	$P_3(x)$
-0.11	-0.1097783008	-0.1097781666
-0.1	-0.09983341664	-0.09983333333
-0.09	-0.08987854919	-0.0898785
-0.08	-0.07991469396	-0.07991466666
-0.07	-0.06994284733	-0.06994283333
-0.06	-0.05996400647	-0.059964
-0.05	-0.04997916927	-0.04997916666
-0.04	-0.03998933418	-0.03998933333
-0.03	-0.02999550020	-0.0299955
-0.02	-0.01999866669	-0.01999866666
-0.01	-0.009999833334	-0.009999833333
0	0	0
0.01	0.009999833334	0.009999833333
0.02	0.01999866669	0.01999866666
0.03	0.02999550020	0.0299955
0.04	0.03998933418	0.03998933333
0.05	0.04997916927	0.04997916666
0.06	0.05996400647	0.059964
0.07	0.06994284733	0.06994283333
0.08	0.07991469396	0.07991466666
0.09	0.08987854919	0.0898785
0.1	0.09983341664	0.09983333333

¿Cuál es mejor aproximación de la función sen(x) en torno al punto x = 0



$P_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$
$y = x$
$P_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$
$f(x) = sen(x)$
y
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−2
2
4

x	$sen(x)$	$P_3(x)$	$P_5(x)$
-0.1	-0.09983341664	-0.09983333333	-0.09983341666
-0.09	-0.08987854919	-0.0898785	-0.08987854920
-0.08	-0.07991469396	-0.07991466666	-0.07991469397
-0.07	-0.06994284733	-0.06994283333	-0.06994284733
-0.06	-0.05996400647	-0.059964	-0.05996400648
-0.05	-0.04997916927	-0.04997916666	-0.04997916927
-0.04	-0.03998933418	-0.03998933333	-0.03998933418
-0.03	-0.02999550020	-0.0299955	-0.02999550020
-0.02	-0.01999866669	-0.01999866666	-0.01999866669
-0.01	-0.009999833334	-0.009999833333	-0.009999833334
0	0	0	0
0.01	0.009999833334	0.009999833333	0.009999833334
0.02	0.01999866669	0.01999866666	0.01999866669
0.03	0.02999550020	0.0299955	0.02999550020
0.04	0.03998933418	0.03998933333	0.03998933418
0.05	0.04997916927	0.04997916666	0.04997916927
0.06	0.05996400647	0.059964	0.05996400648
0.07	0.06994284733	0.06994283333	0.06994284733
0.08	0.07991469396	0.07991466666	0.07991469397

¿Qué aproximación es mejor?

$$f(x) = sen(x)$$

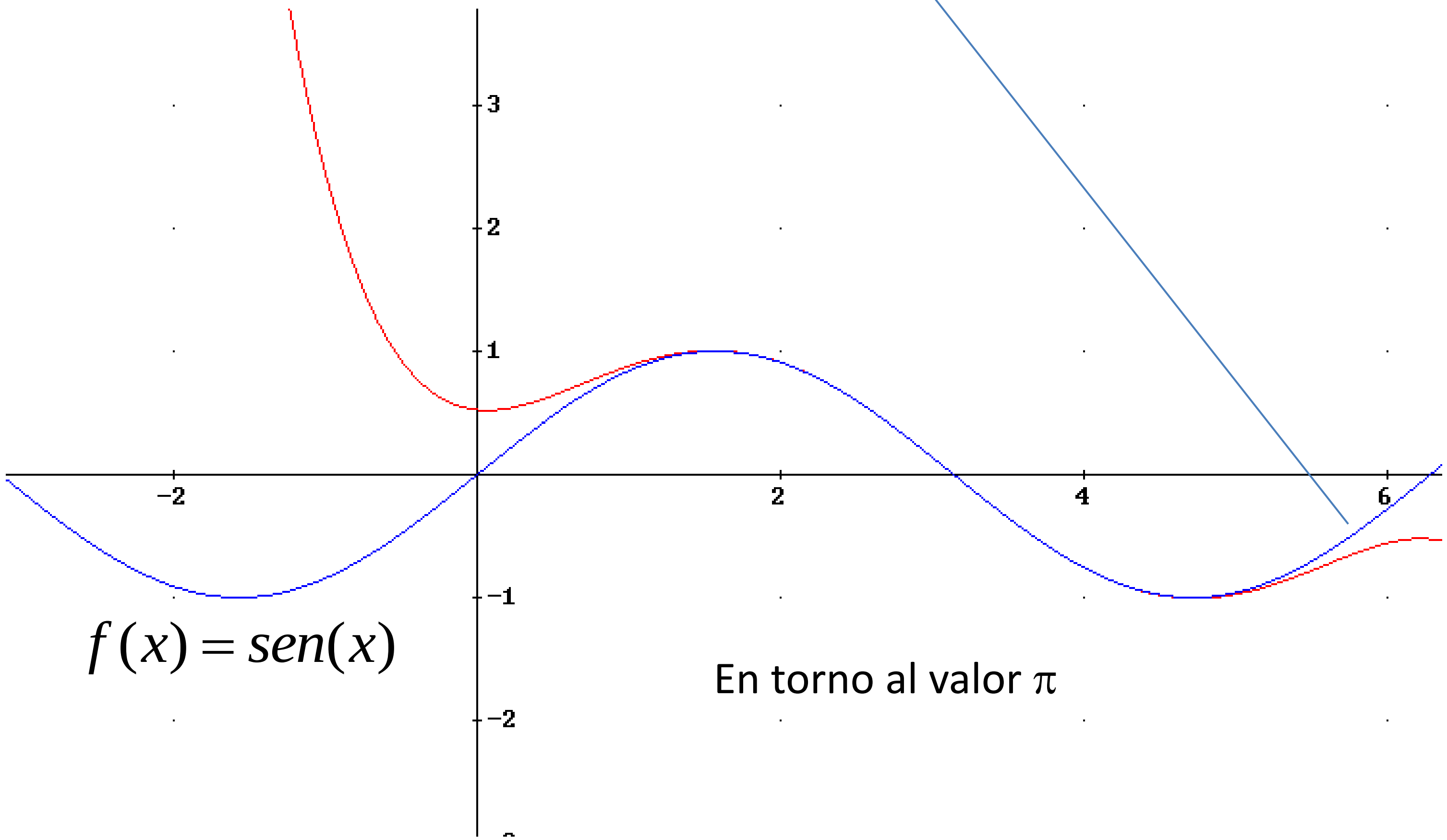
$$P_1(x) = x$$

$$P_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

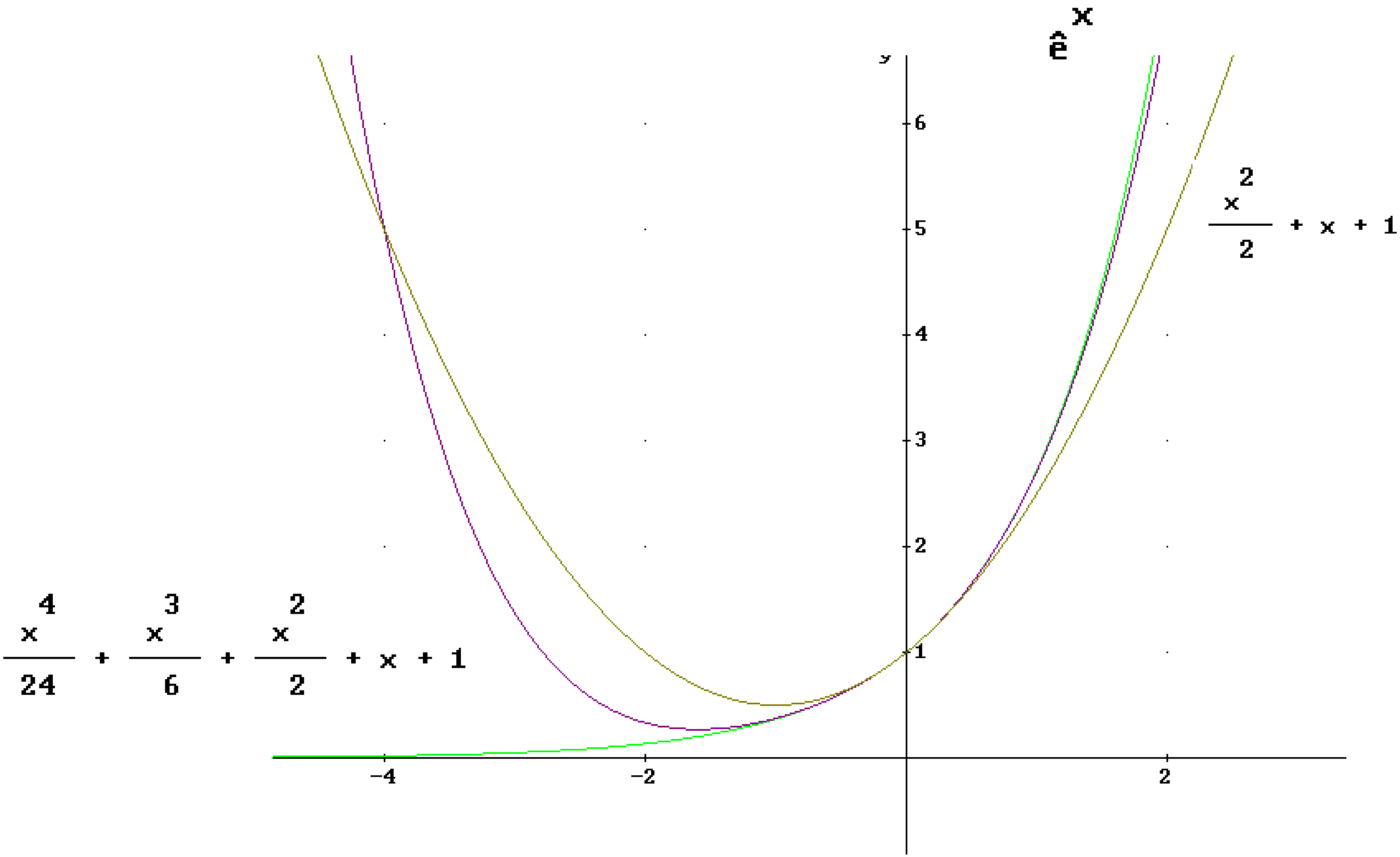
$$P_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

Estos son los polinomios de Taylor

$$-\frac{x^5}{120}+\frac{\pi\cdot x^4}{24}+\frac{x^3\cdot(2-\pi^2)}{12}+\frac{\pi\cdot x^2\cdot(\pi^2-6)}{12}-\frac{x\cdot(\pi^4-12\cdot\pi^2+24)}{24}+\frac{\pi\cdot(\pi^4-20\cdot\pi^2+120)}{120}$$



¿Cómo se construyen estos polinomios?



Esta aproximación es una propiedad “local”

Teorema de Taylor.[2][3][4] Sea $k \geq 1$ un entero y la función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ diferenciable k veces en el punto $a \in \mathbf{R}$. Entonces existe una función $h_k : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tal que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + h_k(x)(x-a)^k, \qquad (1)$$

y $\quad \lim_{x \to a} h_k(x) = 0$. Esta es la llamada **forma de Peano del resto**.

El polinomio que aparece en el teorema de Taylor se denomina **polinomio de Taylor de orden *k***.

$$P_k(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Este polinomio es una buena aproximación de la función en una "vecindad" del valor $x = a$.

```
#1:    SIN(x)
#2:    TAYLOR(SIN(x), x, 0, 3)
```

#3: $x - \dfrac{x^3}{6}$

```
#4:    TAYLOR(SIN(x), x, 0, 4)
```

#5: $x - \dfrac{x^3}{6}$

```
#6:    TAYLOR(SIN(x), x, 0, 5)
```

#7: $\dfrac{x^5}{120} - \dfrac{x^3}{6} + x$

$$Taylor(f(x), x, a, n)$$

La función

La variable

El valor local

El grado del polinomio