La función exponencial: $y = e^x$

Eliseo Martínez[†], Douglas Fuenteseca[†], Carlos Farías[†]

† Departamento de Matemática. Universidad de Antofagasta

31 de mayo de 2016

Resumen

Estos apuntes, amparado en el proyecto de docencia *Hacer y corregir en el proceso evaluativo*, financiado por la Universidad de Antofagasta, entrega un tratamiento para la función exponencial y se utilizará como modelo para variadas situaciones biológicas.

1. El número e

Consideremos la sucesión

$$(1 + \frac{1}{n})^n \tag{1}$$

Se puede verificar que a medida que n crece el valor de $(1 + \frac{1}{n})^n$ tiende a un número que está entre 2 y 3, esto es

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = 2{,}718281828...$$

y es entonces que a este valor límite, en honor al matemático suizo Leonard Euler se le consigna con la letra incial de su apellido "e". La manera de calcular el número e parece, mediante la sucesión (1), un tanto artificiosa. Sin embargo, como lo veremos más adelante, no lo es. Lo extraordinario es que podemos obtener este número mediante otro límite. En efecto, se puede verificar que

$$\lim_{n\to-\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e \tag{2}$$

2. La función exponencial

Si definimos la función e^x, y la observamos su gráfica, *prima facie* obtenemos lo siguiente:

1. Es una función con valores positivos, esto es para cualquier valor de x, siempre $e^x > 0$
2. Si $x \to \infty$, esto es "x es muy grande positivo", entonces $e^x \to \infty$, esto es
$$\lim_{n\to\infty} e^x = \infty$$

3. Si $x \to -\infty$, esto es "x es muy grande negativo", entonces $e^x \to 0$, esto es

$$\lim_{n \to -\infty} e^x = 0$$

4. La función e^x corta al eje Y en el valor 1 ($e^0 = 1$)

En (1) habíamos establecido que

$$\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$$

Ahora vamos a demostrar someramente que

$$\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x \tag{3}$$

En efecto, sea x cualquier número real positivo, entonces

$$1 + \frac{x}{n} = 1 + \frac{1}{n/x}$$

en consecuencia

$$(1 + \frac{x}{n})^n = ((1 + \frac{1}{n/x})^{\frac{n}{x}})^x$$

y como la cantidad dentro del paréntesis del segundo miembro de esta igualdad converge al número e cuando $n \to \infty$, entonces se concluye (3) Para el caso cuando $x < 0$ basta usar el mismo argumento pero esta vez utilizando (2).

3. Ejercicios propuestos

Calcule los siguientes límites

1. $\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{3}{n})^n$
2. $\lim_{n \to \infty} (1 - \frac{3}{n})^n$
3. $\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{2n})^n$
4. $\lim_{n \to \infty} (1 - \frac{1}{3n})^n$
5. $\lim_{n \to \infty} (1 - \frac{1}{n^2})^n$
6. $\lim_{n \to \infty} (1 - \frac{3}{5n})^{2n}$
7. $\lim_{n \to \infty} (2 + \frac{1}{n})^n$ (Cuidado con este ejercicio)