La función cuadrática: $y = x^2$

Eliseo Martínez[†], Douglas Fuenteseca[†], Carlos Farías[†]

† Departamento de Matemática. Universidad de Antofagasta

31 de mayo de 2016

Resumen

Estos apuntes, amparado en el proyecto de docencia *Hacer y corregir en el proceso evaluativo*, financiado por la Universidad de Antofagasta, entrega un tratamiento, poco frecuente en la literatura del caso, a la función cuadrática $y = x^2$, utilizando el clásico *cuadrado del binomio* de tal forma de trabajar con la parábola en su forma estándar, $y = k(x-a)^2 + b$ que, como sabemos entrega más información *súbita* que en su forma general $y = Ax^2 + Bx + C$.

1. El cuadrado del binomio

Es clásico el poema matemático que trata el cuadrado del binomio

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

y que reza *El cuadrado de un binomio es igual al cuadrado del primer término más dos veces el primero por el segundo y más el cuadrado del segundo término.*
Y nunca tiene una aplicación real, más que servir de excusas para que el alumno trate de encontrar esta factorización entre una galimatías de letras que más que apoyar el uso de las matemáticas conducen a desvalorarlas.
Consideremos la expresión

$$x^2 + bx + c \tag{1}$$

Notemos que

$$x^2 + bx + c = (x + \frac{b}{2})^2 + c - \frac{b^2}{4}$$

El término $-\frac{b^2}{4}$ es simplemente para contrarrestar el cuadrado del segundo término del binomio $(x + \frac{b}{2})^2$. A manera de ejemplo consideremos $x^2 + 3x - 1$, entonces

$$x^2 + 3x - 1 = (x + \frac{3}{2})^2 - 1 - \frac{9}{4} = (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{13}{4}$$

Una expresiÓn levemente más complicada que (1) está dada por

$$Ax^2 + Bx + C$$

sin embargo su tratamiento es similar haciendo

$$Ax^2 + Bx + C = A(x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A})$$

y trabajamos de manera similar la expresión contenida en el paréntesis. Veamos un ejemplo con la expresión $3x^2 - 2x + 1$. Tenemos

$$3x^2 - 2x + 1 = 3(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3})$$

y de este modo

$$3(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}) = 3[(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9}] = 3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{2}{3}$$

La pregunta que surge es ¿Cuál es la utilidad de la expresión $3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{1}{3}$ sobre la expresión $3x^2 - 2x + 1$?

2. La parábola $y = k(x-a)^2 + b$

La función

$$x \to x^2$$

es una de las funciones más útiles usada en matemáticas, estadística e ingeniería. Su gráfica, esto es el conjunto de puntos en el plano de la forma

$$\{(x, x^2)/x \epsilon \mathbf{R}\}$$

se conoce como parábola.

La función cuadrática

$$y = k(x-a)^2 + b$$

nos entrega la siguiente información *prima facie*:

1. El vértice de la parábola se encuentra en el punto (a, b)
2. Si $k > 0$ la parábola tiene concacvidad positiva (hacia arriba), y si $k < 0$ la parábola tiene concavidad negativa (hacia abajo)
3. Si k y b tienen distintos signos entonces la parábola tiene raíces reales y estas son

   $$x_1 = a + \sqrt{-\frac{b}{k}}; x_2 = a - \sqrt{-\frac{b}{k}}$$

4. La parábola corta al eje Y en el valor $ka^2 + b$

En efecto, si tenemos la parábola x^2 entonces la transformación kx^2 mantiene su vértice en el punto $(0,0)$ y solo altera su concavidad, positiva si $k > 0$, negativa si $k < 0$, y además altera su çrecimiento", esto es si k es muy grande ($|k| > 1$) la parábola crecerá o decrecerá muy "violentamente"; y si k es pequeño ($|k| < 1$), la parábola crecerá o decrecerá lentamente. Ahora bien el cambio de kx^2 a $k(x-a)^2 + b$ significa que la parábola se ha movido a unidades en el eje horizontal y b unidades en el eje vertical.

3. Ejercicios propuestos

Las expresiones matemáticas $Ax^2 + Bx + C$ llévelas a la forma equivalente $k(x-a)^2 + b$

1. $x^2 - 2x + 2$
2. $x^2 - 2x$
3. $x^2 - 4x + 1$
4. $-2x^2 + 8x + 5$
5. $x^2 - 5$
6. $2x^2 + 4x - 6$