

La distribución Birnbaum Saunders

Abstract

Esta tesis revisita la distribución *Birnbaum Saunders* (BS), y para esto se sigue la trayectoria clásica. En primer lugar se tiene una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una normal de parámetros μ y σ^2 , y sobre la suma finita de las primera n variables se construye la distribución BS . Con esto recordamos lo esencial de los parámetros α y β que caracterizan a esta distribución, esto es que β tiene unidades de tiempo (si estamos trabajando con tiempo de falla) y α es adimensional e indica estimativamente, entre otras cosas, el coeficiente de variación de una variable distribuida según BS . En segundo lugar, relajamos la normalidad y a la sucesión de variables aleatorias las consideramos emanadas de una normal truncada en el intervalo real positivo, y en esta ocasión, aplicamos el *Teorema Central del Límite* para de esta forma caer en la distribución BS . El objetivo de utilizar la normal truncada positiva es simplemente asegurarnos, por las razones históricas que asocian a esta distribución en el crecimiento de una "grieta" que producirá el colapso, a que, efectivamente, la evolución de esta grieta sea, por lo menos, no decreciente (cuestión que podría ocurrir al considerar la distribución normal). Se comparan algunos resultados, fundamentalmente de la esperanza y la varianza, para ambos casos. En tercer lugar, se exige solamente que la sucesión de variables sean positivas, e idénticamente distribuidas pero sin conocer la distribución en particular, y para esto se acude a la *Teoría de la Renovación*, que está ciertamente ligada, por lo menos en su génesis, a la distribución BS . Nuevamente comparamos algunos resultados interesantes, por lo menos del punto de vista didáctico, entre lo que nos entrega la *Teoría de la Renovación* y el tratamiento clásico de la BS . En cuarto lugar, en lo que respecta a la estimación de los parámetros α y β , presentamos una novedosa estimación para β que estará, bajo ciertas condiciones accesibles, muy próximo del *estimador máximo verosímil*, que en rigor es la solución de una ecuación no - lineal y admite solución numérica, y también estará próxima del estimador asintótico de β . Finalmente realizamos algunos cálculos con datos clásicos en el uso de la BS , y también realizamos algunas simulaciones en la generación de muestras que provienen de una BS , a fin de aplicar los resultados aquí propuestos. Dejamos de manifiesto que no hemos atacado el problema de encontrar la distribución asociada al estimador que proponemos para β .

Palabras claves: Distribución Birnbaum Saunders, estimación máximo verosímil, teoría de renovación, confiabilidad.

Esta Tesis fue financiada integralmente por el Proyecto 1333-2007 de la Dirección de Investigación de la Universidad de Antofagasta.

Introducción

Vamos a suponer que el colapso de un sistema se debe a que en el material que lo compone se inicia una grieta, de tal manera que, debido a la tensión o estrés o del propio uso del sistema, la grieta empieza a propagarse hasta llegar a un determinado umbral donde se genera el colapso. Bajo este supuesto, parece natural establecer los siguientes pasos del proceso:

- Un material está sujeto a ciclos de cargas o choques repetitivos, los cuales producen una fisura o grieta.
- La intensidad de cargas impuestas en el material son las mismas de un ciclo a otro.
- La falla ocurre cuando el tamaño de la fisura o grieta del material sobrepasa cierto umbral de resistencia.

Uno de los modelos que explica el tiempo de vida de un determinado sistema corresponde a la distribución *Birnbaum Saunders* (*BS*), presentadas y tratadas en Freundenthal y Shinozuka (1961), Birnbaum y Saunders (1969a y 1969b) y Desmond (1985). Esta distribución modela ciertos fenómenos de falla de un sistema que por su uso en ciclos o tandas alcanza un umbral que permite su colapso. La modelación considera una sucesión finita de variables aleatoria independientes e idénticamente distribuidas, de modo que la suma de estas variables eventualmente superará cierto valor umbral que genera la falla. Utilizando el teorema del límite central sobre esta suma de variables se encuentra la distribución llamada Birnbaum Saunders.

Birnbaum - Saunders (1969a) introduce la distribución de tiempo de falla de dos parámetros α y β cuya densidad esta dada por

$$f(y, \alpha, \beta) = \frac{y^{-3/2}(y + \beta)}{2\alpha\beta^{1/2}} \phi(t) \quad (1)$$

con $t = \frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{y}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{y}} \right)$, $y > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ donde $\phi(\cdot)$ es la densidad $N(0,1)$.

La distribución Birnbaum Saunders es la distribución de

$$Y = \beta \left(\frac{\alpha}{2}V + \sqrt{\left(\frac{\alpha V}{2}\right)^2 + 1} \right)^2 \quad (2)$$

donde $V \sim N(0, 1)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Y esto se denota por $Y \sim BS(\alpha, \beta)$.

Una derivación general basada en un modelo biológico es dada por Desmond (1985). Desmond (1986) investiga la relación entre la distribución Birnbaum- Saunders y la distribución inversa Gaussiana. Otros trabajos en el modelo Birnbaum- Saunders lo han realizado Chang and Tang (1993, 1994), Dupuis and Mills (1998) and Rieck (1995, 1999, 2003).

Birnbaum- Saunders (1969b) discute los estimadores de máxima verosimilitud y Engelhardt et al.(1981) obtiene las distribuciones asintóticas de los estimadores de máxima verosimilitud. Ng et al.(2003) discute los estimadores de máxima verosimilitud y una modificación en los estimadores de momentos y su distribución asintótica. Diaz- García y Leiva

- Sánchez (2005) utilizan la familia de distribuciones elípticas univariadas para extender la distribución Birnbaum- Saunders a una familia Birbaum Saunders generalizada (BSG) y recientemente Vilca-Labra y Leiva-Sánchez (2006) utilizan una familia skew-simétrica para extender la familia Birnbaum- Saunders Generalizada.

El presente trabajo está dividido de la siguiente manera. En la Sección 1 se muestra la distribución BS de manera clásica, generada por una sucesión de variables aleatorias idénticamente distribuidas según una distribución normal. Creemos importante recordar esta generación toda vez que la distribución BS depende de dos parámetros, considerando que si se admite el crecimiento de la grieta mediante la densidad normal deberíamos encontrar la estimación de tres parámetros (los dos parámetros de la normal y el umbral de colapso para la grieta); además en esta sección repasamos las principales propiedades de la distribución BS . En la Sección 2 estudiamos la forma geométrica de la densidad BS respecto de sus parámetros de manera de abonar terreno para la interpretación de la *skewness* y *kurto-sis*. En la Sección 3, se considera una variable aleatoria T que sigue una distribución BS obteniéndose una transformación estocástica sobre T cuya distribución será normal estándar, y de esta forma se pueden obtener números aleatorios para una BS , y además obtener con cierta facilidad los momentos de cualquier orden para T . En la Sección 4 se genera la distribución BS mediante una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una normal truncada en $(0, \infty)$. El propósito de este modelo es simplemente exigir que las variables que modelan el tamaño de la grieta no decrezca, esto es que sean variables no negativas. Es interesante esta exigencia toda vez que con los cálculos de la esperanza y la varianza para este nuevo modelo se obtienen resultados interesantes al compararlos con la esperanza y varianza del modelo clásico. Estos resultados refuerzan la Sección 5, en que se considera el problema del colapso con ayuda de la Teoría de la Renovación. Se comparan las convergencias y divergencias, en la esperanza del tiempo de falla, para el modelo tratado por la Teoría de la Renovación con el modelo BS . En la Sección 6 se estudian problemas de estimación clásicos, con la novedad de presentar un estimador próximo al estimador máximo verosímil, y cuyo cálculo es sencillo y eventualmente su distribución asociada más accesible de calcular. Finalmente en el apéndice A se realiza un desarrollo exhaustivo para el cálculo compacto de los momentos de una distribución BS ; y en el apéndice B se presenta una serie de simulaciones para probar los resultados obtenidos en este trabajo.

1. Generación de la distribución Birnbaum Saunders

Con los pasos que definen el proceso de falla, es tentador suponer que el tamaño o longitud de la fisura o grieta en un ciclo cualquiera sigue una distribución normal con media μ y varianza σ^2 , de manera que este tamaño o longitud es independiente en cada ciclo (lo cual es un supuesto excesivamente fuerte). De esta manera si denotamos por X_i el tamaño de la fisura en el i -ésimo ciclo, entonces

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2) \quad ; \quad i = 1, 2, \dots \quad (3)$$

indicando con esto, que cada X_i sigue una distribución normal de media μ y varianza σ^2 .

Ahora bien, de esta manera, en algún ciclo, digamos n , el tamaño de la fisura acumulada estará determinada por

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2) \quad (4)$$

donde S_n , como es natural, tendrá una distribución normal con media $n\mu$ y varianza $n\sigma^2$. Entonces si suponemos que w es el valor umbral que al sobrepasar la fisura el sistema colapsa, el principal interés es determinar el cálculo de

$$\Pr \{S_n > w\}$$

que en virtud de (4) se tendrá que

$$\Pr \{S_n > w\} = \Phi \left(\frac{n\mu - w}{\sqrt{n}\sigma} \right) \quad (5)$$

donde como es habitual $\Phi(\cdot)$ denota la distribución acumulada de la distribución normal estándar. Por otro lado, puesto que queremos determinar el tiempo de falla del sistema, y aún estamos en el caso discreto (ciclos), definamos la siguiente variable aleatoria,

$$T = \min \{n / S_n > w\} \quad (6)$$

Para nada resulta complicado verificar que

$$\Pr \{T \leq n\} = \Pr \{S_n > w\} = \Phi \left(\frac{n\mu - w}{\sqrt{n}\sigma} \right) \quad (7)$$

Observemos, que la variable aleatoria T depende funcionalmente del parámetro w , sin embargo podemos ahondar más en esto. Si w fuese conocido el problema de predecir el ciclo de falla deja de ser tal en virtud de (7), puesto que nos limitaríamos a estimar los parámetros μ y σ del modelo dado en (3), y así obtener las probabilidades de falla en cualquier ciclo. Por lo tanto, suponiendo que w es un parámetro desconocido se realiza una sencilla reparametrización¹ sobre el argumento de la distribución Φ en (7). Notemos que

$$\frac{n\mu - w}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{\sqrt{w\mu}}{\sigma} \left(\sqrt{\frac{n}{w/\mu}} - \sqrt{\frac{w/\mu}{n}} \right) \quad (8)$$

La igualdad dada en (8) es la viga maestra para la generación de la distribución Birnbaum Saunders. En efecto, en virtud de las buenas propiedades topológicas en la recta real, podemos pasar de los ciclos (tiempo discreto) a tiempo continuo positivo, simplemente reemplazando n por t en (7) y utilizando (8), esto es

$$\Pr \{T \leq t\} = \Phi \left(\frac{\sqrt{w\mu}}{\sigma} \left(\sqrt{\frac{t}{w/\mu}} - \sqrt{\frac{w/\mu}{t}} \right) \right); \quad t > 0 \quad (9)$$

Luego, haciendo

$$\alpha = \frac{\sigma}{\sqrt{w\mu}}; \quad \beta = \frac{w}{\mu} \quad (10)$$

¹ Lo que se intenta hacer es bajarde tres parámetros desconocidos a, virtualmente, dos parámetros.

volvemos a la ecuación dada en (9), y obtenemos

$$\Pr \{T \leq t\} = \Phi \left(\alpha^{-1} \left(\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}} \right) \right); \quad t > 0 \quad (11)$$

Decimos entonces que "una" variable aleatoria T que tenga la distribución dada en (11) con $\alpha, \beta > 0$ tiene la distribución Birnbaum Saunders. Casi todo lo que sabemos de la distribución BS se inicia en (11), fundamentalmente donde aplicar este modelo, formas de estimación de los parámetros α y β , puesto que como veremos más adelante las ecuaciones para la máxima verosimilitud no son sencillas de resolver, ni menos las distribuciones de los estimadores, así como extender nuevas generalizaciones basadas en esta distribución. Por ahora repasemos rápidamente las bondades de esta distribución. Es casi inmediato establecer que el parámetro β es el parámetro de escala. En efecto, veamos la siguiente proposición presentando antes la siguiente notación $BS(t; \alpha, \beta) = \Phi \left(\alpha^{-1} \left(\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}} \right) \right)$.

Proposición 1. Si $T \sim BS(t; \alpha, \beta)$ entonces $aT \sim BS(t; \alpha, a\beta)$, con $a > 0$.

Demostración.

$$\Pr \{aT < t\} = \Pr \left\{ T < \frac{t}{a} \right\} = \Phi \left(\alpha^{-1} \left(\sqrt{\frac{t}{a\beta}} - \sqrt{\frac{a\beta}{t}} \right) \right) = BS(t; \alpha, a\beta) \blacksquare$$

En rigor, todas las primeras buenas propiedades de esta distribución se generan por las buenas propiedades que tiene la densidad normal. Veamos otra buena propiedad de la inversa de una variable Birnbaum Saunders.

Proposición 2. Si $T \sim BS(t; \alpha, \beta)$ entonces $T^{-1} \sim BS(t; \alpha, \beta^{-1})$.

Demostración

$$\begin{aligned} \Pr \{T^{-1} < t\} &= \Pr \left\{ T > \frac{1}{t} \right\} = 1 - \Phi \left(\alpha^{-1} \left(\sqrt{\frac{1/t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{1/t}} \right) \right) \\ &= 1 - \Phi \left(\alpha^{-1} \left(\sqrt{\frac{\beta^{-1}}{t}} - \sqrt{\frac{t}{\beta^{-1}}} \right) \right) \\ &= \Phi \left(\alpha^{-1} \left(\sqrt{\frac{t}{\beta^{-1}}} - \sqrt{\frac{\beta^{-1}}{t}} \right) \right) = BS(t; \alpha, \beta^{-1}) \blacksquare \end{aligned}$$

2. La densidad Birnbaum Saunders

El cálculo de la densidad es simplemente el cálculo de la derivada de (11), esto es

$$\frac{d\Phi(s)}{dt} = \Phi'(s) \frac{ds}{dt} \quad (12)$$

donde

$$s = \alpha^{-1} \left(\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}} \right)$$

Y puesto que

$$\begin{aligned} \Phi'(s) &= \phi(s) \\ \frac{ds}{dt} &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{1}{\alpha^2 t \beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha^2 t^3}} \right) \end{aligned}$$

donde como es habitual $\phi(\cdot)$ es la densidad normal estándar. Entonces reemplazando en (12) nos queda

$$\frac{d\Phi(s)}{dt} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{1}{2\pi\alpha^2\beta t}} + \sqrt{\frac{\beta}{2\pi\alpha^2 t^3}} \right) e^{-\frac{1}{2\alpha^2} \left(\frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} - 2 \right)} ; t, \alpha, \beta > 0 \quad (13)$$

En la Figura 1 se trazan seis gráficas manteniendo fijo el parámetro α en 0.17, y haciendo variar β con los valores 101, 106, 111, 116, 121, 126. En verdad que no es casualidad que estas densidades estén "centradas" en β , como se puede observar, puesto que β es la mediana de estas densidades. En efecto, de la ecuación (11) podemos ver que

$$\Pr \{T \leq \beta\} = \Phi(0) = 0.5. \quad (14)$$

Véamos lo que ocurre con la densidad haciendo variar α manteniendo fijo el parámetro de escala β . La Figura 2 de la página 8 nos está indicando que el parámetro α controla la forma, y que toda vez que su valor es pequeño, según lo indican las gráficas, se hace más simétrica, no obstante este efecto de simetría lo veremos más adelante en la página 10

3. Representación estocástica de una variable Birnbaum Saunders

Supongamos que tenemos una variable aleatoria T que sigue una distribución Birnbaum Saunders $BS(t; \alpha, \beta)$. Si definimos la variable aleatoria

$$S = \alpha^{-1} \left[\sqrt{\frac{T}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{T}} \right] \quad (15)$$

entonces esta variable S sigue una distribución normal estándar, esto es $S \sim N(0, 1)$. En efecto, la función de densidad de T está dada por (13), luego la variable aleatoria definida en (15) tiene como función de densidad, $f_S(s)$, a:

$$f_S(s) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{1}{2\pi\alpha^2\beta t}} + \sqrt{\frac{\beta}{2\pi\alpha^2 t^3}} \right) e^{-\frac{1}{2\alpha^2} \left(\frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} - 2 \right)} \left| \frac{ds}{dt} \right|^{-1}$$

donde $s = \alpha^{-1} \left[\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}} \right]$, y en consecuencia $\frac{ds}{dt} = \alpha^{-1} \left(\sqrt{\frac{1}{4\beta t}} + \sqrt{\frac{\beta}{4t^3}} \right)$. Reem-

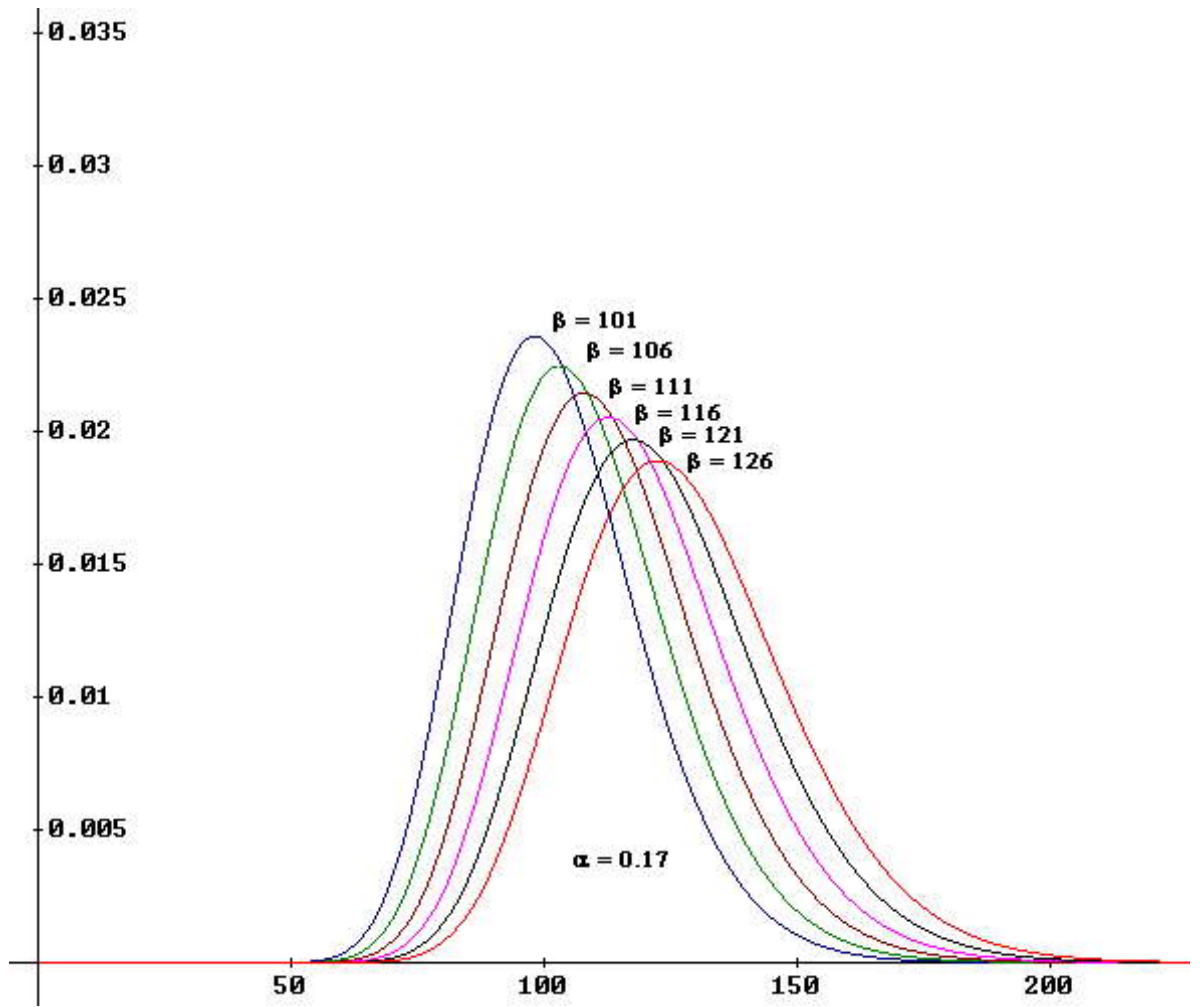


Figure 1: Densidades Birbaum Saunders con parámetro fijo $\alpha = 0.17$, y parámetros β variando como se indica.

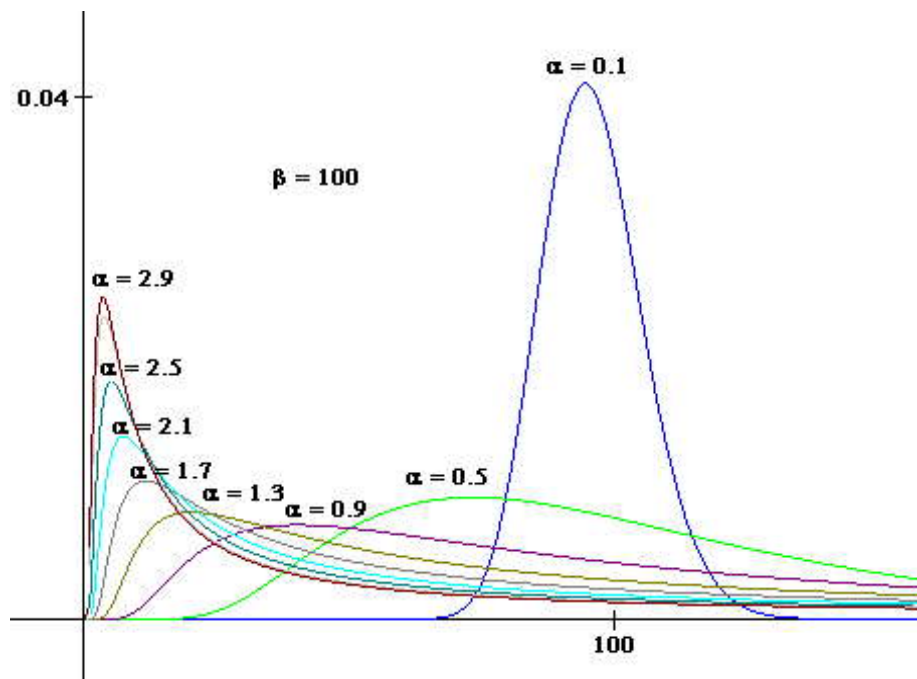


Figure 2: Densidades Birbaum Saunders manteniendo $\beta = 100$, y haciendo variar α según se indica

plazando estas expresiones en la ecuación anterior, obtenemos que

$$f_S(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\alpha^2}(\frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} - 2)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}s^2} = \phi(s) \quad (16)$$

donde efectivamente la densidad de S , según (15), tiene una densidad normal estándar.

Este resultado es fundamental para poder generar números aleatorios obtenidos de una distribución $BS(t; \alpha, \beta)$. En efecto, generamos valores aleatorios, s_i , obtenidos de una distribución normal estándar, luego calculando la inversa de la función $s = \alpha^{-1} \left[\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}} \right]$, que es

$$t = \beta \left[\frac{\alpha}{2} s + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2} s\right)^2 + 1} \right]^2 \quad (17)$$

obtenemos los números aleatorios t_i , que se ajustan a la distribución $BS(t; \alpha, \beta)$.

Este resultado lo resumimos en la siguiente proposición,

Proposición 3. Si $S \sim N(0, 1)$ entonces

$$T = \beta \left[\frac{\alpha}{2} S + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2} S\right)^2 + 1} \right]^2 \sim BS(t; \alpha, \beta) \quad (18)$$

A menudo es frecuente definir la distribución Birnbaum Saunders de una variable aleatoria si ella admite la representación estocástica dada en (18). En cualquier caso, esta representación resulta fundamental para encontrar la función generatriz de los momentos de una variable Birnbaum Saunders, puesto que el cálculo de las integrales descansará en las buenas propiedades de las potencias pares de una cierta transformación de una variable que se distribuye normal estándar. En efecto, de (18) tenemos que los momentos, μ_r , $r = 1, 2, \dots$, están dados por

$$\mu_r = E[T^r] = \int_{-\infty}^{\infty} \beta^r \left[\frac{\alpha}{2} s + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2} s\right)^2 + 1} \right]^{2r} \phi(s) ds \quad (19)$$

Estos momentos son sencillos de computar, en virtud de las propiedades de la expresión en el integrando. A continuación entregamos los momentos μ_r , con $r = 1, \dots, 5$, donde con alguna maniobra algebraica se puede establecer una forma más compacta (lo veremos en el Apéndice A),

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{\beta}{2} (\alpha^2 + 2) \\ \mu_2 &= \frac{\beta^2}{2} (3\alpha^4 + 4\alpha^2 + 2) \\ \mu_3 &= \frac{\beta^3}{2} (15\alpha^6 + 18\alpha^4 + 9\alpha^2 + 2) \\ \mu_4 &= \frac{\beta^4}{2} (105\alpha^8 + 120\alpha^6 + 60\alpha^4 + 16\alpha^2 + 2) \end{aligned} \quad (20)$$

$$\mu_5 = \frac{\beta^5}{2} (945\alpha^{10} + 1050\alpha^8 + 525\alpha^6 + 150\alpha^4 + 25\alpha^2 + 2)$$

Así, entonces, la varianza de la variable T está dada por,

$$V [T] = \mu_2 - (\mu_1)^2 = (\alpha\beta)^2(1 + \frac{5}{4}\alpha^2)$$

3.1 Kurtosis y skewness

Con el cálculo de los momentos anteriores de una distribución BS podemos revisar estos conceptos y ver sus implicancias en esta clase de distribución.

Kurtosis escrita al español libremente como *curtosis*, con el agregado de que no existe esta palabra en el lenguaje español, es una medida de lo "picudo" (concentrada entorno a la media) de la distribución de probabilidad de una variable aleatoria de número real. En la actualidad existen dos versiones muy utilizadas en la medición de este grado de picudo. Una es la curtosis propiamente tal y que se denota por β_2 (Abramowitz and Stegun 1972, p. 928) o por α_4 (Kenney and Keeping 1951, p. 27; Kenney and Keeping 1961, pp. 99-102) y definida como

$$\beta_2 = \alpha_4 = \frac{\mu_4^i}{(\mu_2^i)^2} \quad (21)$$

donde, en general para cualquier densidad $f(x)$ y esperanza $\mu_1 = \int_S x f(x) dx$, μ_r^i , con soporte en S , denota el r -momento central, esto es

$$\mu_r^i = \int_S (x - \mu_1)^r f(x) dx$$

La otra definición de curtosis, llamada "exceso de curtosis" (Kenney and Keeping 1951, p. 27) denotada por γ_2 (Abramowitz and Stegun 1972, p. 928) está definida por

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4^i}{(\mu_2^i)^2} - 3 \quad (22)$$

La expresión (22) es utilizada en virtud de que el exceso de curtosis de una densidad normal es $\gamma_2 = 0$ (de modo que la curtosis a secas de la densidad normal es $\beta_2 = 3$), indicando con esto que la joroba de una densidad normal no tiene exceso (es una agudez "media" y es entonces que se utiliza el término *mesocurtosis*, meso = medio; en griego). De esta manera, considerando a la densidad normal como punto de referencia, si una densidad tiene exceso de curtosis $\gamma_2 > 0$ significa que su "pico" es muy agudo o fino (*leptocurtosis*, leptó = delgado, fino; nuevamente del griego); y si $\gamma_2 < 0$ significa que es muy plano (*platicurtosis*, plati = plano; otra vez del griego)

Observemos que el denominador en (21) es la varianza, y además el momento central μ_4^i en función de los momentos está dado por

$$\mu_4^i = -3\mu_1^4 + 6\mu_1^2\mu_2 - 4\mu_1\mu_3 + \mu_4$$

Entonces podemos calcular la curtosis de la densidad Birnbaum Saunders de parámetros α y β ,

$$\beta_2(\alpha, \beta) = \beta_2(\alpha) = \frac{3(211\alpha^4 + 120\alpha^2 + 16)}{(5\alpha^2 + 4)^2} \quad (23)$$

En primer lugar eso ocurre en general con dos parámetros de escala de las distribuciones donde la curtosis es independiente de β , y es asintóticamente estable cuando $\alpha \rightarrow \infty$, en efecto

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \beta_2(\alpha) = \frac{633}{25} = 25.32$$

Para las distribuciones $BS(0.2, 100)$ y $BS(1.2, 150)$ obtenemos las siguientes curtosis respectivamente

$$\begin{aligned} \beta_2(0.2, 100) &= \beta_2(0.2) \approx 3.595 \\ \beta_2(1.2, 150) &= \beta_2(1.2) \approx 14.979 \end{aligned}$$

Por otro lado, el coeficiente de asimetría, γ_1 , que mide el grado de asimetría de una densidad, está dado por

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{(\mu_2')^{3/2}} = \frac{2\mu_1^3 - 3\mu_1\mu_2 + \mu_3}{(\mu_2 - \mu_1^2)^{3/2}}$$

Para una densidad $BS(\alpha, \beta)$ podemos calcular el coeficiente de asimetría usando (20), y obtenemos

$$\gamma_1(\alpha, \beta) = \gamma_1(\alpha) = \frac{4\alpha(11\alpha^2 + 6)}{(5\alpha^2 + 4)^{3/2}}$$

De esta forma, el coeficiente de asimetría no depende de β . No resulta complicado demostrar lo siguiente,

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \gamma_1(\alpha) = \frac{44\sqrt{5}}{25} \approx 3.9355 \quad , \quad \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \gamma_1(\alpha) = 0$$

4. La distribución Birnbaum Saunders generada por una normal truncada

En la Sección 1 generamos la distribución Birnbaum Saunders mediante una serie de variables independientes e idénticamente distribuidas según una normal de media μ y varianza σ^2 . No obstante, no exigiendo normalidad pero manteniendo la independencia y exigiendo solamente que las variables X_i admitan esperanza y varianza comunes, esto es

$$E[X_i] = \mu ; V[X_i] = \sigma^2 ; i = 1, \dots$$

y haciendo $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, podemos llegar a la distribución BS mediante la aplicación del *Teorema del Límite Central*, puesto que las variables $(S_n - n\mu)/\sqrt{n}\sigma$ convergerán en distribución a una variable normal estándar, y entonces ocurrirá (5) de la Sección 1.

Sin embargo, en estricto rigor puede ocurrir que la sucesión $\{S_n\}$ no sea estrictamente creciente, es decir que con probabilidad no nula puede ocurrir que para algún n_0 se tenga que $S_{n_0} > S_{n_0+1}$, es decir el tamaño de la fisura decrece en el ciclo $n_0 + 1$. Para evitar este inconveniente exigiremos que las variables $\{X_i\}$ sean no negativas.

Vamos a suponer que estas variables no negativas independientes se distribuyen idénticamente según una densidad normal truncada, esto es

$$X_i \sim \frac{1}{\sigma} \Phi^{-1} \left(\frac{\mu}{\sigma} \right) \phi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right); x_i > 0, i = 1, \dots; \mu, \sigma > 0 \quad (24)$$

donde, como siempre, ϕ y Φ denotan la densidad y distribución acumulativa normal estándar, respectivamente. De modo que la función de distribución de X_i es

$$\Pr \{X_i < x_i\} = \Phi^{-1} \left(\frac{\mu}{\sigma} \right) \left(\Phi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) - \Phi \left(-\frac{\mu}{\sigma} \right) \right) \quad (25)$$

A objeto de generar la distribución *BS* para esta sucesión de variables independientes no negativas recordaremos la esperanza y varianza de una variable aleatoria que tenga la densidad dada en (24).

Proposición 4. Si $X \sim \frac{1}{\sigma} [\Phi(\frac{\mu}{\sigma})]^{-1} \phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$ con $\mu, \sigma > 0$ entonces

$$E[X] = \sigma \frac{\phi(\frac{\mu}{\sigma})}{\Phi(\frac{\mu}{\sigma})} + \mu$$

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} E[X] &= \frac{1}{\sigma} [\Phi(\frac{\mu}{\sigma})]^{-1} \int_0^{\infty} x \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) dx \\ &= \frac{1}{\sigma} [\Phi(\frac{\mu}{\sigma})]^{-1} \int_{-\mu/\sigma}^{\infty} (\mu + y\sigma) \phi(y) \sigma dy \\ &= [\Phi(\frac{\mu}{\sigma})]^{-1} \left(\mu \int_{-\mu/\sigma}^{\infty} \phi(y) dy + \sigma \int_{-\mu/\sigma}^{\infty} y \phi(y) dy \right) \\ &= [\Phi(\frac{\mu}{\sigma})]^{-1} \left(\mu \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) + \sigma \phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) \right) \\ &= \mu + \sigma \frac{\phi(\frac{\mu}{\sigma})}{\Phi(\frac{\mu}{\sigma})} \blacksquare \end{aligned}$$

Nota 1. La función de riesgo de una distribución normal estándar, conocida como la razón inversa de Mills², está dada por

$$\lambda(a) = \frac{\phi(a)}{1 - \Phi(a)}; -\infty < a < \infty$$

luego si hacemos $a = \frac{x-\mu}{\sigma}$ nos queda que

$$\lambda\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{\phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}$$

² La razón de Mills está dada por $\frac{1-\Phi(t)}{\phi(t)}$.

en particular si $x = 0$,

$$\lambda\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) = \frac{\phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)}{1 - \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)} = \frac{\phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)} \quad (26)$$

de tal forma que

$$E[X] = \mu + \sigma \lambda\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) = \mu_* \quad (27)$$

La función $\lambda\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)$ tiene las siguientes propiedades

$$\lim_{\sigma \rightarrow \mu^-} \lambda\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) = \frac{\sqrt{2} e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 1 \right]} \approx 0.2876 \quad (28)$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \lambda\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) = 0 \quad (29)$$

facilmente verificable por cálculo directo. De tal forma que obtenemos lo siguiente,

Proposición 5. Si $X \sim \frac{1}{\sigma} \left[\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) \right]^{-1} \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ con $0 < \sigma < \mu$ entonces

$$\mu < E[X] < 1.2876 \mu$$

Demostración. El resultado es inmediato de (28) y (29) ■

Nota 2. En particular la proposición anterior nos dice que para μ fijo (positivo) $E[X]$ como función de σ es creciente en el intervalo (μ, σ) . Y en particular, para $\sigma = 0.2\mu$ entonces $E[X] = 1.000000297\mu$, en virtud de (26). De otra forma, para $\sigma \leq 0.1\mu$ la esperanza de X es, en esencia, $\mu \simeq \mu_*$.

Proposición 6. Si $X \sim \frac{1}{\sigma} \left[\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) \right]^{-1} \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ con $\mu, \sigma > 0$ entonces

$$E[X^2] = \sigma^2 + \mu^2 + \mu\sigma \lambda\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)$$

Demostración. Por integración casi directa con el cambio de variable $y = \frac{x-\mu}{\sigma}$, se tiene que

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \frac{1}{\sigma} \left[\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) \right]^{-1} \int_0^{\infty} x^2 \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) dx \\ &= \left[\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) \right]^{-1} \int_{-\mu/\sigma}^{\infty} (\mu + \sigma y)^2 \phi(y) dy \\ &= \left[\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) \right]^{-1} \left[\mu^2 \int_{-\mu/\sigma}^{\infty} \phi(y) dy + 2\mu\sigma \int_{-\mu/\sigma}^{\infty} y \phi(y) dy + \sigma^2 \int_{-\mu/\sigma}^{\infty} y^2 \phi(y) dy \right] \\ &= \left[\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) \right]^{-1} \left[\mu^2 \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) + 2\mu\sigma \phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) + \sigma^2 \left(\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) - \frac{\mu}{\sigma} \phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) \right) \right] \\ &= \sigma^2 + \mu^2 + \mu\sigma \frac{\phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)} = \sigma^2 + \mu^2 + \mu\sigma \lambda\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

En consecuencia la varianza de X es

$$\begin{aligned}
V[X] &= \sigma^2 + \mu^2 + \mu\sigma \lambda\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) - \left(\mu + \sigma \lambda\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)\right)^2 \\
&= \sigma^2 - \mu\sigma \lambda\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) - \sigma^2 \left[\lambda\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)\right]^2 \\
&= \sigma^2 - \sigma \lambda\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) \left[\sigma \lambda\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) + \mu\right] = \sigma_*^2
\end{aligned} \tag{30}$$

Como antes, si $\sigma \leq 0.1\mu$, se tiene que $\sigma^2 \simeq \sigma_*^2$ puesto que $\lambda(-10) \simeq 0$. Los restantes momentos se pueden obtener mediante la función generadora de momentos,

Proposición 7. Si $X \sim \frac{1}{\sigma} \left[\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)\right]^{-1} \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ con $\mu, \sigma > 0$ entonces la función generadora de momentos, $M(t)$, está dada por

$$M(t) = e^{\mu t + (\sigma t)^2/2} \frac{\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma} + \sigma t\right)}{\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)}$$

Demostración. Inmediata por integración directa ■

Si tenemos una sucesión de variables independientes $X_i \sim \frac{1}{\sigma} \left[\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)\right]^{-1} \phi\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)$; $x_i > 0$, $i = 1, \dots$; $\mu, \sigma > 0$, con esperanza y varianza dadas en (27) y (30), entonces

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{\text{Distribución}} N(n\mu_*, n\sigma_*^2)$$

en virtud del *Teorema del Límite Central*. Y en consecuencia, si volvemos a definir la variable T como en (6), esto es $T = \min\{n / S_n > w\}$, y pasando a tiempo continuo se tendrá que para esta variable su distribución es

$$\Pr\{T \leq t\} = \Phi\left(\frac{\sqrt{w\mu_*}}{\sigma_*} \left(\sqrt{\frac{t}{w/\mu_*}} - \sqrt{\frac{w/\mu_*}{t}}\right)\right); \quad t > 0$$

Haciendo una reparametrización como en (10)

$$\alpha_* = \frac{\sigma_*}{\sqrt{w\mu_*}}; \quad \beta_* = \frac{w}{\mu_*} \tag{31}$$

generamos una variable T con distribución $BS(t, \alpha_*, \beta_*)$.

Hemos obtenido una variable Birnbaum Saunders generada por una sucesión de variables independientes idénticamente distribuidas según una normal truncada en el soporte $(0, \infty)$, esto es nos aseguramos que sean *positivas*.

5. La Distribución Birnbaum Saunders y la teoría de la renovación

La convergencia en distribución de la sucesión de variables $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, ya sea que las X_i provengan de una normal o una normal truncada, genera, como hemos visto una distribución $BS(t, \alpha, \beta)$ o $BS(t, \alpha_*, \beta_*)$, respectivamente, mediante la aplicación del Teo-

rema del Límite Central a la variable $T = \min \{n / S_n > w\}$, consiguiendo con esto refundir el parámetro "umbral" w en los otros dos parámetros. En esta sección vamos a trabajar directamente con la variable aleatoria discreta T , y compararemos los resultados en media y varianza con los de la distribución Birnbaum Saunders.

Sea $\{X_i\}_i^\infty$ una sucesión de variables positivas, independientes e idénticamente distribuidas, esto es $\Pr \{X_k \leq x\} = F(x)$; $k = 1, 2, \dots$, definamos

$$S_0 = 0; S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

y además

$$T_0(x) = \min \left\{ n / \sum_{i=1}^n X_i > x \right\} \quad (32)$$

Es decir si $T_0(x) = m_0$ entonces $\sum_{i=1}^{m_0} X_i > x$ y $\sum_{i=1}^p X_i > x \Rightarrow m_0 \leq p$. Ahora bien, hagamos $\Pr \{S_k \leq x\} = F_k(x)$, es claro que

$$\Pr \{T_0(x) > k\} = \Pr \left\{ \sum_{i=1}^k X_i \leq x \right\} = \Pr \{S_k \leq x\} = F_k(x) \quad (33)$$

y en consecuencia

$$\Pr \{T_0(x) = k\} = \Pr \{T_0(x) \geq k\} - \Pr \{T_0(x) \geq k+1\} = F_k(x) - F_{k+1}(x)$$

Con lo anterior podemos obtener una fórmula para la esperanza de $T_0(x)$,

Proposición 8. $E [T_0(x)] = \sum_{k=1}^{\infty} F_k$

Demostración.

$$\begin{aligned} E [T_0(x)] &= \sum_{k=1}^{\infty} k \Pr \{T_0(x) = k\} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \Pr \{T_0(x) \geq k\} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \Pr \{S_k \leq x\} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} F_k \blacksquare \end{aligned}$$

Nota 3. $E [T_0(x)] = R(x)$ es llamada la función de renovación.

La distribución F_k puede ser obtenida de acuerdo con la fórmula de convolución para

$S_k = X_1 + \dots + X_k$, mediante

$$F_k(x) = \int_0^x F_{k-1}(x-y) dF(y) \quad (34)$$

Como podemos observar, el cálculo de las funciones de distribución $F_k(x)$ no es sencillo puesto que su solución obedece a una ecuación integral, sin embargo utilizaremos más adelante una solución aproximada. De momento, sigamos recogiendo resultados de la teoría de la renovación.

Proposición 9. Sea $T_0(x)$ como en (32), con $X_i \sim \frac{1}{\sigma} [\Phi(\frac{\mu}{\sigma})]^{-1} \phi(\frac{x_i - \mu}{\sigma})$; $x_i > 0$, $i = 1, \dots$; $\mu, \sigma > 0$ entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{E[T_0(x)]}{x} = \frac{1}{\mu + \lambda(-\frac{\mu}{\sigma})\sigma} = \frac{1}{\mu_*}$$

Demostración. Es casi inmediata. En efecto, de la teoría de la renovación es sabido, ver por ejemplo Karlin (1975), que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{R(x)}{x} = \frac{1}{E[X_1]}$$

y puesto que $E[X_1] = \mu + \lambda(-\frac{\mu}{\sigma})\sigma$ se tiene el resultado ■

Nota 4. Este resultado nos dice que para un x suficientemente grande, entonces

$$E[T_0(x)] = \frac{x}{\mu + \lambda(-\frac{\mu}{\sigma})\sigma} = \frac{x}{\mu_*}$$

Proposición 10. Si $X_i \sim \frac{1}{\sigma} [\Phi(\frac{\mu}{\sigma})]^{-1} \phi(\frac{x_i - \mu}{\sigma})$; $x_i > 0$, $i = 1, \dots$; $\mu, \sigma > 0$ entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{T_0(x) - x/\mu_*}{\sqrt{x\sigma_*^2/\mu_*^3}} < a \right\} = \Phi(a)$$

donde μ_* y σ_*^2 definidos como en (27) y (30), respectivamente.

Demostración. La prueba consiste en aplicar el *Teorema del Límite Central* a la sucesión $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ y utilizar la equivalencia $\Pr\{T_0(x) > n\} = \Pr\{S_n < x\}$. En efecto, puesto que $E[S_n] = n\mu_*$ y $V[S_n] = n\sigma_*^2$ se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{S_n - n\mu_*}{\sigma_*\sqrt{n}} > \frac{x - n\mu_*}{\sigma_*\sqrt{n}} \right\} = \Phi \left(\frac{n\mu_* - x}{\sigma_*\sqrt{n}} \right)$$

por otro lado

$$\begin{aligned} \Pr\{S_n > x\} &= \Pr\{T_0(x) \leq n\} \\ &= \Pr \left\{ \frac{T_0(x) - x/\mu_*}{\sqrt{x\sigma_*^2/\mu_*^3}} \leq \frac{n - x/\mu_*}{\sqrt{x\sigma_*^2/\mu_*^3}} \right\} \\ &= \Pr \left\{ \frac{T_0(x) - x/\mu_*}{\sqrt{x\sigma_*^2/\mu_*^3}} \leq \frac{n\mu_* - x}{\sigma_*\sqrt{x/\mu_*}} \right\} \end{aligned}$$

Ahora bien, si para un a fijo hacemos

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ x \rightarrow \infty}} \frac{n\mu_* - x}{\sigma_* \sqrt{n}} = a$$

concluimos que

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ x \rightarrow \infty}} \Pr \{S_n > x\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \Pr \{T_0(x) \leq n\} = \Phi(a) \blacksquare$$

Nota 5. La proposición anterior nos dice que para un x suficientemente grande $V [T_0(x)] = x\sigma_*^2/\mu_*^3$.

Vamos a comparar estos resultados con la esperanza y la varianza de una variable aleatoria $T \sim BS(t, \alpha_*, \beta_*)$, $t > 0$, donde los parámetros α_* y β_* están dados según (31), donde $w = x$. Observemos el siguiente cuadro resumen

$T_0(x) \sim F_k(x) - F_{k+1}(x)$ discreta	$T \sim BS(t, \alpha_*, \beta_*)$ continua
$E [T_0(x)] \approx \frac{x}{\mu_*}$	$E [T] = \beta_* \left(1 + \frac{\alpha_*^2}{2}\right) = \frac{x}{\mu_*} + \frac{1}{2} \frac{\sigma_*^2}{\mu_*^2}$
$V [T_0(x)] \approx \frac{x\sigma_*^2}{\mu_*^3} = \frac{x}{\mu_*} \frac{\sigma_*^2}{\mu_*^2}$	$V [T] = (\alpha_*\beta_*)^2 \left(1 + \frac{5}{4}\alpha_*^2\right) = \frac{x}{\mu_*} \frac{\sigma_*^2}{\mu_*^2} + \frac{5}{4} \frac{\sigma_*^4}{\mu_*^4}$

Tabla 1

Observemos que en la columna izquierda de esta tabla tenemos una aproximación de la esperanza y la varianza para la variable discreta $T_0(x)$, para un x suficientemente grande, toda vez que no conocemos las distribuciones F_k , no obstante si μ_* es mucho mayor que σ_* es evidente que la aproximación es "buena" respecto de la Birbaum Saunders. Podemos eliminar la expresión "x suficientemente grande" para el cálculo de $E [T_0(x)]$ mediante otra aproximación para cualquier valor de x positivo.

En efecto, de la ecuación integral dada en (34) donde $F_k(x) = \Pr \left\{ \sum_{i=1}^k X_i < x \right\}$ con $X_i \sim \frac{1}{\sigma} [\Phi(\frac{\mu}{\sigma})]^{-1} \phi(\frac{x_i - \mu}{\sigma})$ se puede estimar $E [T_0(x)]$, ver Şeyda (1985), mediante

$$E [T_0(x)] \approx \hat{R}(x) = \frac{x}{\mu_*} - F_e(x) + \int_0^x [1 - F_e(x-z)] \left[f(z) + \frac{1}{\mu_*^2} \frac{F^2(z)}{F_e(z)} \right] dz \quad (35)$$

donde $f(z)$ y $F(z)$ son las funciones de densidad y distribución de la normal truncada según (24) y (25), respectivamente, esto es

$$f(z) = \frac{1}{\sigma} \left[\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) \right]^{-1} \phi\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)$$

$$F(z) = \Phi^{-1}\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) \left(\Phi\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) \right)$$

y además

$$F_e(z) = \frac{1}{\mu_*} \int_0^x (1 - F(z)) dz$$

De modo que con la expresión dada en (35) podemos calcular aproximadamente la función

de renovación $\hat{R}(x) \approx E[T_0(x)]$. Observemos los resultados de la Tabla 2.

Parámetros (x, μ, σ)	Şeyda $\hat{R}(x)$	Renovación $\frac{x}{\mu_*}$	B-S $\frac{x}{\mu_*} + \frac{1}{2} \frac{\sigma_*^2}{\mu_*^2}$
(6, 3, 0.8)	1.63097	1.9998	2.0225
(16, 3, 0.8)	4.8683	5.3328	5.3552
(20, 3, 0.8)	6.2015	6.6660	6.6887
(25, 3, 0.8)	7.8680	8.3325	8.3552
(35, 3, 0.8)	11.2010	11.6655	11.6882
(100, 3, 0.8)	32.3301	33.3302	33.3529
(100, 3, 0.5)	32.3301	33.3313	33.3348
(100, 3, 1)	32.8656	33.3294	33.3848
(100, 3, 5)	32.8654	33.3137	67.9805
(200, 3, 2)	66.1958	66.6509	67.5385

Tabla 2

Y como era de esperar, las aproximaciones se rompen cuando $\sigma > \mu$ (observemos la penúltima fila de la Tabla 2).

6. Estimación de los parámetros de una distribución Birnbaum Saunders mediante máxima verosimilitud

Sea $T \sim BS(t, \alpha, \beta)$, y supongamos que tenemos una muestra aleatoria independiente de tamaño n , digamos $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$. La función de versosimilitud para esta muestra está dada por

$$L(\alpha, \beta; \mathbf{t}) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{1}{2\pi\alpha^2\beta t_i}} + \sqrt{\frac{\beta}{2\pi\alpha^2 t_i^3}} \right) \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \right\} \right)$$

Luego la función log verosimilitud es

$$\begin{aligned} \ln L(\alpha, \beta; \mathbf{t}) &= n \ln \left(\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \right) - n \ln(\alpha\beta) + \sum_{i=1}^n \ln \left(\beta^{\frac{1}{2}} t_i^{-\frac{1}{2}} + \beta^{\frac{3}{2}} t_i^{-\frac{3}{2}} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \end{aligned}$$

Como es clásico para encontrar los valores máximos para $\ln L(\alpha, \beta; \mathbf{t})$ derivamos respecto de cada variable e igualamos a cero. Primero respecto de α ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\alpha, \beta; \mathbf{t})}{\partial \alpha} &= -\frac{n}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^3} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) \\ &= -\frac{n}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^3} \left(\frac{\sum_{i=1}^n t_i}{\beta} + \beta \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} - 2n \right) \end{aligned}$$

$$= -\frac{n}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^3} \left(\frac{nA}{\beta} + \frac{n\beta}{H} - 2n \right)$$

donde

$$A(\mathbf{t}) = \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{n} ; (H(\mathbf{t}))^{-1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} \quad (36)$$

son media aritmética y media armónica, respectivamente, y resaltando que están en función de la muestra \mathbf{t} . Ahora resolviendo la ecuación $\frac{\partial \ln L(\alpha, \beta; \mathbf{t})}{\partial \alpha} = 0$, obtenemos la relación

$$\frac{A(\mathbf{t})}{\beta} + \frac{\beta}{H(\mathbf{t})} - 2 = \alpha^2 \quad (37)$$

Por otro lado la derivada de $\ln L(\alpha, \beta; \mathbf{t})$ respecto de β , con alguna manipulación algebraica levemente tediosa es,

$$\frac{\partial \ln L(\alpha, \beta; \mathbf{t})}{\partial \beta} = -\frac{n}{\beta} + \frac{n}{2} \left(\frac{1}{\beta} + \frac{2}{H(\beta + \mathbf{t})} \right) + \frac{n}{2\alpha^2} \left(\frac{A(\mathbf{t})}{\beta^2} - \frac{1}{H(\mathbf{t})} \right) \quad (38)$$

donde, con cierto abuso de notación $\beta + \mathbf{t} = (\beta + t_1, \dots, \beta + t_n)$, o más explícitamente

$$(H(\beta + \mathbf{t}))^{-1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\beta + t_i}$$

Ahora si reemplazamos en (38) la expresión para α^2 obtenida en (37) y haciendo $\frac{\partial L(\alpha, \beta; \mathbf{t})}{\partial \beta} = 0$, nos queda

$$\beta^2 + H(\mathbf{t}) (A(\mathbf{t}) + H(\beta + \mathbf{t})) - \beta (2H(\mathbf{t}) + H(\beta + \mathbf{t})) = 0 \quad (39)$$

De tal modo que si obtenemos una solución para β en la ecuación (39), obtenemos una solución para α mediante la ecuación (37). Definamos

$$g(\beta) = \beta^2 + H(\mathbf{t}) (A(\mathbf{t}) + H(\beta + \mathbf{t})) - \beta (2H(\mathbf{t}) + H(\beta + \mathbf{t})) \quad (40)$$

que es una función continua. Necesitaremos el siguiente lema,

Lema 11 Para $g(\beta)$ definido en (40) se satisface que $g(A(\mathbf{t})) < 0$ y $g(H(\mathbf{t})) > 0$

Demostración. Recordemos que la media armónica satisface lo siguiente $H(\beta + \mathbf{t}) > \beta + H(\mathbf{t})$ y $A(\mathbf{t}) \geq H(\mathbf{t})$ para $\beta > 0$ y $\mathbf{t} > 0$,³ entonces

$$\begin{aligned} g(A(\mathbf{t})) &= A(\mathbf{t})^2 + H(\mathbf{t}) (A(\mathbf{t}) + H(A(\mathbf{t}) + \mathbf{t})) - A(\mathbf{t}) (2H(\mathbf{t}) + H(A(\mathbf{t}) + \mathbf{t})) \\ &< A(\mathbf{t})^2 + H(\mathbf{t}) (A(\mathbf{t}) + A(A(\mathbf{t}) + \mathbf{t})) - A(\mathbf{t}) (2H(\mathbf{t}) + A(\mathbf{t}) + H(\mathbf{t})) \\ &= A(\mathbf{t})^2 + 3H(\mathbf{t})A(\mathbf{t}) - 3H(\mathbf{t})A(\mathbf{t}) - A(\mathbf{t})^2 = 0 \end{aligned}$$

en la última igualdad se aplicó $A(c + \mathbf{t}) = c + A(\mathbf{t})$. Para determinar el signo de $g[H(\mathbf{t})]$ tenemos

$$\begin{aligned} g(H(\mathbf{t})) &= H(\mathbf{t})^2 + H(\mathbf{t}) (A(\mathbf{t}) + H(H(\mathbf{t}) + \mathbf{t})) - H(\mathbf{t}) (2H(\mathbf{t}) + H(H(\mathbf{t}) + \mathbf{t})) \\ &> H(\mathbf{t})^2 + H(\mathbf{t}) (H(\mathbf{t}) + H(H(\mathbf{t}) + \mathbf{t})) - H(\mathbf{t}) (2H(\mathbf{t}) + H(H(\mathbf{t}) + \mathbf{t})) \\ &= H(\mathbf{t})^2 + H(\mathbf{t})^2 + H(\mathbf{t})H(H(\mathbf{t}) + \mathbf{t}) - 2H(\mathbf{t})^2 - H(\mathbf{t})H(H(\mathbf{t}) + \mathbf{t}) = 0 \end{aligned}$$

³ Se entiende que $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) > 0 \Leftrightarrow t_i > 0 ; i = 1, \dots, n$

con lo que el lema queda demostrado ■

De este modo el lema anterior nos asegura que existe una raíz para $g(\beta)$ en el intervalo $[H(\mathbf{t}), A(\mathbf{t})]$. Luego el estimador máximo verosímil $\hat{\beta} \in [H(\mathbf{t}), A(\mathbf{t})]$ se obtiene por métodos numéricos para la resolución de $g(\beta) = 0$ toda vez que la función $g(\beta)$ es no lineal. Y así se obtiene el estimador $\hat{\alpha}$, que será

$$\hat{\alpha} = \sqrt{\frac{A(\mathbf{t})}{\hat{\beta}} + \frac{\hat{\beta}}{H(\mathbf{t})} - 2} \quad (41)$$

Tal vez sea necesario indicar que la cantidad subradical es mayor o igual a cero, en efecto

$$\frac{A(\mathbf{t})}{\hat{\beta}} + \frac{\hat{\beta}}{H(\mathbf{t})} \geq \frac{A(\mathbf{t})}{A(\mathbf{t})} + \frac{H(\mathbf{t})}{H(\mathbf{t})} = 2$$

y que además

$$\begin{aligned} g(A(\mathbf{t})) &= [A(\mathbf{t})]^2 - A(\mathbf{t})H(\mathbf{t}) + H(A(\mathbf{t}) + \mathbf{t})(H(\mathbf{t}) - A(\mathbf{t})) \\ g(H(\mathbf{t})) &= -[H(\mathbf{t})]^2 + A(\mathbf{t})H(\mathbf{t}) \end{aligned} \quad (42)$$

El objetivo principal de esta sección es encontrar una solución aproximada para $g(\beta) = 0$ de modo que sea analíticamente tratable. Fijemos nuestra atención en la función $g(\beta)$ con $\beta \in [H(\mathbf{t}), A(\mathbf{t})]$. La derivada de esta función es

$$\frac{dg(\beta)}{d\beta} = -H(\beta + \mathbf{t}) + (\beta - H(\mathbf{t})) \left[2 - \frac{(H(\beta + \mathbf{t}))^2}{H((\beta + \mathbf{t})^2)} \right] \quad (43)$$

teniendo presente la siguiente notación $(\beta + \mathbf{t})^2 = ((\beta + t_1)^2, \dots, (\beta + t_n)^2)$ es sencillo verificar que

$$\frac{(H(\beta + \mathbf{t}))^2}{H((\beta + \mathbf{t})^2)} \leq 1 \quad (44)$$

Por otro lado podemos observar que si ocurriese que $A(\mathbf{t}) \leq 3H(\mathbf{t})$ entonces $g'(\beta) < 0$. En efecto, por (43) se tiene que

$$\begin{aligned} g'(\beta) &\leq -H(\beta + \mathbf{t}) + 2(\beta - H(\mathbf{t})) \\ &\leq -\beta - H(\mathbf{t}) + 2\beta - 2H(\mathbf{t}) \\ &\leq \beta - 3H(\mathbf{t}) \leq 0 \end{aligned}$$

y de este modo, nos aseguramos que todas las pendientes de las rectas tangentes a la curva $g(\beta)$ en el intervalo $[H(\mathbf{t}), 3H(\mathbf{t})]$ son negativas, de modo que si ocurriese que $A(\mathbf{t}) \leq 3H(\mathbf{t})$ entonces las pendientes $g'(\beta) < 0$ en el intervalo $[H(\mathbf{t}), A(\mathbf{t})]$.

En particular, las derivadas en los valores extremos son

$$\begin{aligned} g'(H(\mathbf{t})) &= -H(H(\mathbf{t}) + \mathbf{t}) \\ g'(A(\mathbf{t})) &= -H(A(\mathbf{t}) + \mathbf{t}) + (A(\mathbf{t}) - H(\mathbf{t})) \left[2 - \frac{(H(A(\mathbf{t}) + \mathbf{t}))^2}{H((A(\mathbf{t}) + \mathbf{t})^2)} \right] \end{aligned}$$

Nota 6. Notemos que las pendientes de las rectas tangentes a la función $g(\beta)$ en los puntos extremos del intervalo $[H(\mathbf{t}), A(\mathbf{t})]$ tienen una diferencia absoluta de

$$\begin{aligned} & |g'(H(\mathbf{t})) - g'(A(\mathbf{t}))| = \\ & = \left| -H(H(\mathbf{t}) + \mathbf{t}) + H(A(\mathbf{t}) + \mathbf{t}) - (A(\mathbf{t}) - H(\mathbf{t})) \left[2 - \frac{(H(A(\mathbf{t}) + \mathbf{t}))^2}{H((A(\mathbf{t}) + \mathbf{t})^2)} \right] \right| \\ & \leq |H(A(\mathbf{t}) + \mathbf{t}) - H(H(\mathbf{t}) + \mathbf{t}) - A(\mathbf{t}) + H(\mathbf{t})| \end{aligned}$$

Por otro lado, la pendiente m de la recta que pasa por los puntos $(H(\mathbf{t}), g(H(\mathbf{t})))$ y $(A(\mathbf{t}), g(A(\mathbf{t})))$, está dada por

$$m = \frac{g(A(\mathbf{t})) - g(H(\mathbf{t}))}{A(\mathbf{t}) - H(\mathbf{t})} = -H(A(\mathbf{t}) + \mathbf{t}) + A(\mathbf{t}) - H(\mathbf{t}) \quad (45)$$

Realizando la diferencia entre (43) y (45), obtenemos las siguientes cotas

$$-H(A(\mathbf{t}) + \mathbf{t}) + 2H(\mathbf{t}) \leq \frac{dg(\beta)}{d\beta} - m \leq -H(H(\mathbf{t}) + \mathbf{t}) + H(A(\mathbf{t}) + \mathbf{t}) + (A(\mathbf{t}) - H(\mathbf{t})) \quad (46)$$

donde se utilizó la desigualdad en (44) para obtener este resultado.

Observemos que la recta que pasa por los puntos $(H, g(H(\mathbf{t})))$ y $(A, g(A(\mathbf{t})))$, que es

$$y = (x - A(\mathbf{t})) \frac{g(A(\mathbf{t})) - g(H(\mathbf{t}))}{A(\mathbf{t}) - H(\mathbf{t})} + g(A(\mathbf{t})) \quad (47)$$

y la raíz de (47), que la denotaremos por $\tilde{\beta}$, es

$$\tilde{\beta} = \frac{g(A(\mathbf{t}))H(\mathbf{t}) - g(H(\mathbf{t}))A(\mathbf{t})}{g(A(\mathbf{t})) - g(H(\mathbf{t}))} \quad (48)$$

al reemplazar adecuadamente en (48) los valores de (42) se obtiene

$$\tilde{\beta} = \frac{H(\mathbf{t})H(A(\mathbf{t}) + \mathbf{t})}{H(A(\mathbf{t}) + \mathbf{t}) + H(\mathbf{t}) - A(\mathbf{t})} \quad (49)$$

Tenemos la siguiente proposición

Proposición 12. Si $A(t) \leq 3H(t)$ entonces $H(\mathbf{t}) \leq \tilde{\beta} \leq \hat{\beta} \leq A(t)$

Demostración. La función $g(\beta)$ es estrictamente decreciente en el intervalo $[H(\mathbf{t}), 3H(\mathbf{t})]$ en virtud de (43), y puesto que $g(\hat{\beta}) = 0$ solo basta verificar que $g(\tilde{\beta}) \geq 0$. En efecto,

$$\begin{aligned} g(\tilde{\beta}) &= \tilde{\beta}^2 + H(\mathbf{t}) \left(A(\mathbf{t}) + H(\tilde{\beta} + \mathbf{t}) \right) - \tilde{\beta} \left(2H(\mathbf{t}) + H(\tilde{\beta} + \mathbf{t}) \right) \\ &= \tilde{\beta}^2 + H(\mathbf{t})A(\mathbf{t}) + H(\mathbf{t})H(\tilde{\beta} + \mathbf{t}) - \tilde{\beta} 2H(\mathbf{t}) - \tilde{\beta} \left(H(\tilde{\beta} + \mathbf{t}) \right) \\ &= \tilde{\beta}^2 + H(\mathbf{t})A(\mathbf{t}) + H(\tilde{\beta} + \mathbf{t}) \left(H(\mathbf{t}) - \tilde{\beta} \right) - \tilde{\beta} 2H(\mathbf{t}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \tilde{\beta}^2 + H(\mathbf{t})A(\mathbf{t}) + \left(\tilde{\beta} + H(\mathbf{t}) \right) \left(H(\mathbf{t}) - \tilde{\beta} \right) - \tilde{\beta} 2H(\mathbf{t}) \\
&= \tilde{\beta}^2 + H(\mathbf{t})A(\mathbf{t}) + \left((H(\mathbf{t}))^2 - \tilde{\beta}^2 \right) - \tilde{\beta} 2H(\mathbf{t}) \\
&= H(\mathbf{t}) \left[H(\mathbf{t}) + A(\mathbf{t}) - 2\tilde{\beta} \right] \\
&= H(\mathbf{t}) \left[H(\mathbf{t}) + A(\mathbf{t}) - 2 \frac{H(\mathbf{t})H(A(\mathbf{t}) + \mathbf{t})}{H(A(\mathbf{t}) + \mathbf{t}) + H(\mathbf{t}) - A(\mathbf{t})} \right] \\
&= H(\mathbf{t}) \frac{\left([H(\mathbf{t})]^2 - [A(\mathbf{t})]^2 + H(A(\mathbf{t}) + \mathbf{t})(A(\mathbf{t}) - H(\mathbf{t})) \right)}{H(A(\mathbf{t}) + \mathbf{t}) + H(\mathbf{t}) - A(\mathbf{t})} \\
&\geq H(\mathbf{t}) \frac{\left([H(\mathbf{t})]^2 - [A(\mathbf{t})]^2 + (A(\mathbf{t}) + H(\mathbf{t}))(A(\mathbf{t}) - H(\mathbf{t})) \right)}{H(A(\mathbf{t}) + \mathbf{t}) + H(\mathbf{t}) - A(\mathbf{t})} = 0
\end{aligned}$$

la primera desigualdad ocurre porque $H(\tilde{\beta} + \mathbf{t}) \geq \tilde{\beta} + H(\mathbf{t})$, y la segunda desigualdad porque $H(A(\mathbf{t}) + \mathbf{t}) \geq A(\mathbf{t}) + H(\mathbf{t})$ ■

En Birnbaum Saunders (1969) se reporta que el estimador asintótico de β está dado por $\beta_\infty = \sqrt{A(\mathbf{t})H(\mathbf{t})}$. El problema es ¿son próximos los valores de $\tilde{\beta}$ y $\hat{\beta}$? La respuesta es no siempre. En virtud de (46) la proximidad de $\tilde{\beta}$ y $\hat{\beta}$ dependerá de la diferencia $A(\mathbf{t}) - H(\mathbf{t})$.

6.1 Condiciones para que $\tilde{\beta}$ sea un estimador aproximado al estimador máximo verosímil $\hat{\beta}$

De (36) y considerando $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) > \mathbf{0}$ y $\mathbf{t}^{-1} = (t_1^{-1}, \dots, t_n^{-1})$, notemos que $(A(\mathbf{t}^{-1}))^{-1} = H(\mathbf{t})$, y además sea

$$t^{(1)} = \max \{t_1, \dots, t_n\}; t^{(n)} = \min \{t_1, \dots, t_n\}$$

tenemos el siguiente lema,

Lema 13 Para $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) > \mathbf{0}$

$$A(\mathbf{t}) - (A(\mathbf{t}^{-1}))^{-1} \leq t^{(1)} - t^{(n)} \quad (50)$$

Demostración. Tenemos que

$$A(\mathbf{t}) = \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{n} \leq \frac{\sum_{i=1}^n t^{(1)}}{n} = t^{(1)}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
A(\mathbf{t}^{-1}) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t^{(n)}} = \frac{1}{t^{(n)}} \\
t^{(n)} &\leq (A(\mathbf{t}^{-1}))^{-1}
\end{aligned}$$

en consecuencia

$$A(\mathbf{t}) - (A(\mathbf{t}^{-1}))^{-1} \leq t^{(1)} - t^{(n)} \blacksquare$$

Consideremos ahora la desviación estándar de $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$, esto es $S(\mathbf{t}) = A(\mathbf{t}^2) - (A(\mathbf{t}))^2$, entonces acudiremos al siguiente lema cuya demostración se encuentra en Wolkowicz y Styan (1980),

Lema 14 Para $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) > \mathbf{0}$ se tiene que

$$t^{(1)} \leq A(\mathbf{t}) + \sqrt{n-1} S(\mathbf{t}) \quad (51)$$

Tenemos la siguiente proposición

Proposición 15. Para $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) > \mathbf{0}$, se cumple

$$A(\mathbf{t}) - H(\mathbf{t}) \leq \sqrt{n-1} S(\mathbf{t})$$

Demostración. Por (51) tenemos que

$$S(\mathbf{t}) \geq \frac{t^{(1)} - A(\mathbf{t})}{\sqrt{n-1}} \geq \frac{t^{(1)} - t^{(n)}}{\sqrt{n-1}}$$

en consecuencia

$$t^{(1)} - t^{(n)} \leq \sqrt{n-1} S(\mathbf{t})$$

y por (50) se cumple la proposición \blacksquare

Nota 7. De esta forma la diferencia entre la media aritmética y la media armónica de una muestra positiva de tamaño n estará siempre acotada por un múltiplo de la desviación estándar, y esto hecho nos entregará una medida de la proximidad entre los valores de $\tilde{\beta}$ y $\hat{\beta}$.

Haciendo exigencias sobre la desviación estándar de la muestra podemos encontrar una cota deseada para $A(\mathbf{t}) - H(\mathbf{t})$. En efecto, se tiene que

$$S(\mathbf{t}) < \frac{d}{\sqrt{n-1}} \Rightarrow A(\mathbf{t}) - H(\mathbf{t}) < d$$

Ahora bien, la pregunta que surge es ¿cuál es el valor adecuado para d ?

Nota 8. Calcularemos el coeficiente de variación de una variable T que se distribuye según $BS(t; \alpha, \beta)$, y este es

$$CV(T) = \frac{\sqrt{V[T]}}{E[T]} = \frac{\alpha\beta\sqrt{(1 + \frac{5}{4}\alpha^2)}}{\frac{\beta}{2}(\alpha^2 + 2)} = \frac{2\alpha\sqrt{(1 + \frac{5}{4}\alpha^2)}}{(\alpha^2 + 2)} = c(\alpha)$$

coeficiente de variación que depende solamente del parámetro α , de ahí que lo denotemos por $c(\alpha)$. Este coeficiente de variación tiene la siguiente propiedad fácil de verificar

$$0 < c(\alpha) < \sqrt{5}; \alpha > 0$$

$$c(\alpha) \approx \alpha; 0 < \alpha \leq 1$$

Puesto que $\sqrt{V[T]} = S[T] = c(\alpha)E[T]$, el parámetro α nos indica cuando la desviación estándar de T supera a la esperanza de T , y esto ocurre para los valores $\alpha > 1$. De modo que si tenemos una muestra aleatoria $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) > \mathbf{0}$ independiente obtenida de

una distribución $BS(t; \alpha, \beta)$ de tal forma que la desviación estándar de la muestra, esto es $S(\mathbf{t})$, tiene un valor aproximado, por ejemplo, al 20% del valor del promedio muestral $A(\mathbf{t})$, es decir $S(\mathbf{t}) = 0.2 A(\mathbf{t})$, entonces un buen estimador de α (sea o no el estimador máximo verosímil) deberá entregar un resultado cercano a 0.2.

De momento sabemos que el verdadero valor de α para que la desviación estándar no supere a la media debe ser menor que 1, y por otro lado el estimador máximo verosímil de β debe estar entre $A(\mathbf{t})$ y $H(\mathbf{t})$, y en consecuencia se debe satisfacer la igualdad dada en (41), de modo que

$$\frac{A(\mathbf{t})}{\hat{\beta}} + \frac{\hat{\beta}}{H(\mathbf{t})} - 2 = \hat{\alpha}^2$$

supongamos por un momento que $A(\mathbf{t})$ y $H(\mathbf{t})$ están muy próximos, de modo que si reemplazamos $\hat{\beta}$ por $A(\mathbf{t})$ tenemos la siguiente aproximación⁴

$$\frac{A(\mathbf{t})}{A(\mathbf{t})} + \frac{A(\mathbf{t})}{H(\mathbf{t})} - 2 = \frac{A(\mathbf{t})}{H(\mathbf{t})} - 1 \approx \hat{\alpha}^2$$

es decir

$$A(\mathbf{t}) - H(\mathbf{t}) \approx \hat{\alpha}^2 H(\mathbf{t})$$

y puesto que

$$\hat{\alpha} \approx \frac{S(\mathbf{t})}{A(\mathbf{t})}$$

se tiene que

$$A(\mathbf{t}) - H(\mathbf{t}) \approx \frac{(S(\mathbf{t}))^2 H(\mathbf{t})}{(A(\mathbf{t}))^2}$$

Los cálculos presentados en esta subsección lo consolidaremos en el siguiente clásico ejemplo de datos obtenidos en Birbaum Saunders (1969), y que se describen en la Tabla 3.

70	90	96	97	99	100	103	104	104	105
107	108	108	108	109	109	112	112	113	114
114	114	116	119	120	120	120	121	121	123
124	124	124	124	124	128	128	129	129	130
130	130	131	131	131	131	131	132	132	132
133	134	134	134	134	134	136	136	137	138
138	138	139	139	141	141	142	142	142	142
142	142	144	144	145	146	148	148	149	151
151	152	155	156	157	157	157	157	158	159
162	163	163	164	166	166	168	170	174	196
212									

Tabla 3

De acuerdo a la tabla anterior, entregamos los siguientes resultados

⁴ Observemos que llegamos a la misma aproximación si reemplazamos $\hat{\beta}$ por $H(\mathbf{t})$.

$A(\mathbf{t})$	$H(\mathbf{t})$	$A(\mathbf{t}) - H(\mathbf{t})$	$S(\mathbf{t})$	$\frac{S(\mathbf{t})}{A(\mathbf{t})}$	$\frac{(S(\mathbf{t}))^2 H(\mathbf{t})}{(A(\mathbf{t}))^2}$
133,73	129,933	3,799	22,356	0,1671	3,617

$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\tilde{\beta}$	$\tilde{\alpha}$
131.82	0.1704	131,818	0,17038

donde $\tilde{\alpha}$ es el valor obtenido al reemplazar $\tilde{\beta}$ en (41), esto es

$$\tilde{\alpha} = \sqrt{\frac{A(\mathbf{t})}{\tilde{\beta}} + \frac{\tilde{\beta}}{H(\mathbf{t})} - 2} \quad (52)$$

Podemos observar que, prácticamente, no hay diferencia entre los estimadores máximo verosímiles y los propuestos en este trabajo.

En el Anexo B presentamos una serie de simulaciones obtenidos al generar 200 números aleatorios, s_i , de una normal estándar, donde a cada uno de estos números le aplicamos la transformación, según (17), para obtener los número positivos t_i , esto es

$$t_i = \beta \left[\frac{\alpha}{2} s_i + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2} s_i \right)^2 + 1} \right]^2$$

con parámetros prefijados α y β . De este modo estimaremos los parámetros según (49) y (52) y los compararemos con los estimadores asintóticos y los verdaderos valores.

Appendix A. Los momentos de una Birnbaum Saunders

En la página 9, sección 3, establecimos en la ecuación (19) los momentos μ_r de una variable $T \sim BS(t; \alpha, \beta)$. Veremos ahora una forma compacta para el cálculo de estos momentos. Considerando el factor integrante del lado derecho de (19) sin considerar el término β^r haremos la expansión del binomio de Newton, esto es

$$\begin{aligned} \left[\frac{\alpha}{2} s + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2} s\right)^2 + 1} \right]^{2r} &= \sum_{j=0}^{2r} \binom{2r}{j} \left(\frac{\alpha}{2} s\right)^{2r-j} \left(\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2} s\right)^2 + 1}\right)^j \quad (\text{A-1}) \\ &= \sum_{\substack{j \text{ par} \\ j=0}}^{2r} \binom{2r}{j} \left(\frac{\alpha}{2} s\right)^{2r-j} \left(\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2} s\right)^2 + 1}\right)^j \\ &\quad + \sum_{\substack{j \text{ impar} \\ j=0}}^{2r} \binom{2r}{j} \left(\frac{\alpha}{2} s\right)^{2r-j} \left(\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2} s\right)^2 + 1}\right)^j \end{aligned}$$

Fijaremos algunos detalles en la primera sumatoria de los términos pares y cuando $j = 0$. Notemos que

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{j \text{ par} \\ j=0}}^{2r} \binom{2r}{2j} \left(\frac{\alpha}{2} s\right)^{2r-2j} \left(\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2} s\right)^2 + 1}\right)^{2j} \quad (\text{A-2}) \\ &= \sum_{j=0}^r \binom{2r}{2j} \left(\left(\frac{\alpha}{2} s\right)^2\right)^{r-j} \left(\left(\frac{\alpha}{2} s\right)^2 + 1\right)^j \\ &= \sum_{j=0}^r \binom{2r}{2j} \left(\left(\frac{\alpha}{2} s\right)^2\right)^{r-j} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \left(\frac{\alpha}{2} s\right)^{2(j-k)} \\ &= \sum_{j=0}^r \sum_{k=0}^j \binom{2r}{2j} \binom{j}{k} \left(\left(\frac{\alpha}{2} s\right)^2\right)^{r-k} \end{aligned}$$

Observemos que en esta sumatoria los exponentes involucrados son pares.

Por otro lado, haremos un desarrollo tedioso para la suma de los términos impares en (A-1), este es

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{j \text{ impar} \\ j=0}}^{2r} \binom{2r}{j} \left(\frac{\alpha}{2} s\right)^{2r-j} \left(\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2} s\right)^2 + 1}\right)^j \quad (\text{A-3}) \\ &= \sum_{j=1}^r \binom{2r}{2j-1} \left(\frac{\alpha}{2} s\right)^{2r-2j+1} \left(\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2} s\right)^2 + 1}\right)^{2j-1} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2} s\right)^2 + 1} \sum_{j=1}^r \binom{2r}{2j-1} \left(\frac{\alpha}{2} s\right)^{2r-2j+1} \left(\left(\frac{\alpha}{2} s\right)^2 + 1\right)^{j-1} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2} s\right)^2 + 1} \sum_{j=1}^r \sum_{h=0}^{j-1} \binom{2r}{2j-1} \binom{j-1}{k} \left(\frac{\alpha}{2} s\right)^{2r-2k-1}$$

Y en esta sumatoria los exponentes involucrados son impares.

Ahora necesitamos recordar las siguientes propiedades de la densidad normal estándar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{a s^2 + 1} (a s)^m \phi(s) ds = 0 ; \text{ para } m \text{ impar, } a > 0 \quad (\text{A-4})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^k \phi(s) ds = (k-1)!! ; \text{ para } k \text{ par}$$

donde en el segundo caso la notación corresponde al doble factorial, esto es

$$n!! = \begin{cases} 2 \cdot 4 \cdots n & \text{si } n \text{ es par} \\ 1 \cdot 3 \cdots n & \text{si } n \text{ es impar} \\ 1 & \text{si } n = -1, 0 \end{cases}$$

Una propiedad interesante del doble factorial, y que aquí utilizaremos, es la siguiente

$$(2n-1)!! = \frac{(2n)!}{2^n n!} \quad (\text{A-5})$$

Estamos en condiciones de entregar el principal resultado de este apéndice.

Teorema 16. Si $T \sim BS(t; \alpha, \beta)$ entonces

$$\begin{aligned} \mu_r &= \beta^r \sum_{j=0}^r \sum_{k=0}^j \binom{2r}{2j} \binom{j}{k} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2r-2k} (2r-2k-1)!! \\ &= \beta^r \sum_{j=0}^r \sum_{k=0}^j \binom{2r}{2j} \binom{j}{k} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2r-2k} \frac{(2r-2k)!}{2^{r-k} (r-k)!} \end{aligned}$$

Demostración. Aplicando esperanza a la variable aleatoria T^r , en su representación estocástica dada en (19), pag.9, y utilizando (A-1), (A-2) y (A-3) se tiene que las únicas integrales no nulas corresponden a las potencias pares en virtud de (A-4), luego se aplica la propiedad del doble factorial en (A-5) y se tiene el resultado. ■

Appendix B. Simulación

En lo que sigue se generan 200 números aleatorios provenientes de una normal estándar, digamos s_i , y a cada uno de estos números aleatorios se aplica la transformación dada en (17), para obtener los número positivos t_i , esto es

$$t_i = \beta \left[\frac{\alpha}{2} s_i + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2} s_i\right)^2 + 1} \right]^2$$

con determinados α y β prefijados, obtenemos las siguientes resultados

$\beta = 100$					
α	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25
$A(\mathbf{t})$	100,490	101,2204	102,1921	103,4068	104,8669
$H(\mathbf{t})$	100,252	100,2664	100,0442	99,5899	98,9112
d	0,23803	0,95395	2,14797	3,81695	5,95464
$S(\mathbf{t})$	4,90046	9,86046	14,9177	20,10854	25,4678
CV	0,048766	0,09742	0,145976803	0,19446	0,242861
c	0,23841	0,95151	2,13186	3,76598	5,83392
$\tilde{\beta}$	100,3710601	100,7422757	101,1124053	101,4801524	101,8441152
$\tilde{\alpha}$	0,048712599	0,097425116	0,146137467	0,194849562	0,243561312
β_∞	100,3710602	100,7422818	101,1124612	101,4804253	101,8450526
α_∞	0,048712599	0,097425116	0,146137467	0,194849562	0,243561312
$d = A(\mathbf{t}) - H(\mathbf{t}); CV = \frac{S(\mathbf{t})}{A(\mathbf{t})}; c = \frac{(S(\mathbf{t}))^2 H(\mathbf{t})}{(A(\mathbf{t}))^2}$					

(B-1)

$\beta = 100$					
α	0.3	0.9	1.5	2.0	3
$A(\mathbf{t})$	104,550	140,315	210,856	296,1494	539,276
$H(\mathbf{t})$	95,5202	70,006	45,425	31,795	17,1024
d	9,02980	70,3085	165,430	264,354	522,174
$S(\mathbf{t})$	31,7627	130,1589	303,1925	510,553	1100,9601
CV	0,303804	0,92762	1,43792	1,72397	2,04155
c	8,816201	60,239	93,921	94,4978	71,2816
$\tilde{\beta}$	99,9288411	98,05613062	90,17167369	79,13714241	55,56912038
$\tilde{\alpha}$	0,303971243	0,911942905	1,524281951	2,056986658	3,309653431
β_∞	99,93316758	99,11067376	97,86810985	97,03676397	96,03601324
α_∞	0,303971239	0,911854079	1,519530853	2,025798548	3,038208433
$d = A(\mathbf{t}) - H(\mathbf{t}); CV = \frac{S(\mathbf{t})}{A(\mathbf{t})}; c = \frac{(S(\mathbf{t}))^2 H(\mathbf{t})}{(A(\mathbf{t}))^2}$					

(B-2)

$\beta = 20$					
α	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25
$A(\mathbf{t})$	20,025	20,1001	20,228	20,405	20,633
$H(\mathbf{t})$	19,974	19,896	19,768	19,592	19,3697
d	0,0513	0,20479	0,4593	0,813	1,2628
$S(\mathbf{t})$	1,01395	2,03156	3,0637	4,1212	5,2142
CV	0,05063	0,10106	0,15146	0,20197	0,25271
c	0,05121	0,203238	0,45350	0,7992	1,23708
$\tilde{\beta}$	19,99928606	19,99829857	19,99675927	19,99437615	19,99083125
$\tilde{\alpha}$	0,050661989	0,101323967	0,151985918	0,202647814	0,253309609
β_{∞}	19,99928613	19,9983011	19,99678079	19,99447563	19,99115864
α_{∞}	0,050661989	0,101323967	0,151985918	0,202647814	0,253309609
$d = A(\mathbf{t}) - H(\mathbf{t}); CV = \frac{S(\mathbf{t})}{A(\mathbf{t})}; c = \frac{(S(\mathbf{t}))^2 H(\mathbf{t})}{(A(\mathbf{t}))^2}$					

(B-3)

$\beta = 20$					
α	0.3	0.9	1.5	2	3
$A(\mathbf{t})$	20,910	28,063	42,171	59,23	107,855
$H(\mathbf{t})$	19,1040	14,001	9,085	6,359	3,4205
d	1,806	14,0617	33,0861	52,8708	104,435
$S(\mathbf{t})$	6,3525	26,0318	60,6385	102,110	220,192
CV	0,30380	0,9276	1,4379	1,72397	2,04155
c	1,76324	12,0478	18,784	18,899	14,2563
$\tilde{\beta}$	19,98576822	19,61122612	18,03433474	15,82742848	11,11382408
$\tilde{\alpha}$	0,303971243	0,911942905	1,524281951	2,056986658	3,309653431
β_{∞}	19,98663352	19,82213475	19,57362197	19,40735279	19,20720265
α_{∞}	0,303971239	0,911854079	1,519530853	2,025798548	3,038208433
$d = A(\mathbf{t}) - H(\mathbf{t}); CV = \frac{S(\mathbf{t})}{A(\mathbf{t})}; c = \frac{(S(\mathbf{t}))^2 H(\mathbf{t})}{(A(\mathbf{t}))^2}$					

(B-4)

Los siguientes datos fueron generados aleatoriamente según (17) y reportados en Sanchez (2002) mediante los parámetros que se indican,

82.60	88.78	92.59	96.40	97.42	100.72	100.94	101.10	103.13	
104.83	104.99	105.97	106.23	106.76	107.60	107.85	109.35	110.45	
110.66	111.34	112.05	112.13	112.49	113.98	114.43	116.31	116.82	
116.95	116.96	117.23	117.37	117.42	118.23	118.52	119.40	121.21	
121.37	123.05	123.20	124.18	124.22	125.02	125.74	127.13	127.85	
129.49	129.69	130.05	130.07	131.16	131.33	132.13	132.50	132.65	
132.95	133.75	136.37	136.76	136.79	137.04	137.18	137.76	138.45	(B-5)
138.67	139.79	141.34	142.30	144.46	145.18	147.87	148.32	149.11	
149.50	149.97	150.46	150.67	151.45	151.72	152.55	152.86	153.21	
153.58	155.02	156.17	157.78	158.13	158.44	159.78	165.28	166.21	
167.84	170.07	170.90	170.98	174.12	174.91	187.15	189.55	198.94	
201.07									

$$\alpha = 0.170385; \beta = 131.819$$

Los estimadores máximo verosímil son $\hat{\alpha} = 0.182288$ y $\hat{\beta} = 131.170$. Ahora bien, para este mismo grupo de datos los estimadores $\tilde{\beta}$ y β_{∞} son 131,164846 y 131,164930 respectivamente.

7. Conclusiones

Es claro que este modelo tiene su génesis en la Teoría de la Renovación, y puesto que el resultado de la esperanza del colapso, esto es la función de renovación $R(x) = E[T_0(x)]$, es casi trivial toda vez que se conozcan los parámetros μ y σ provenientes de la sucesión de variables aleatorias que modelan el tamaño de la grieta a través del tiempo, se hace necesaria la presentación de la distribución *Birnbaum Saunders*, de tal modo de permitir solamente la estimación de dos parámetros. Por otro lado, el estimador propuesto para β en este trabajo es analíticamente más tratable, con las condiciones exigidas aquí, por supuesto. Quedando abierto el trabajo de encontrar una forma compacta para la distribución del estimador $\tilde{\beta}$.

Finalmente, aunque no ha sido declarada en forma explícita en la presente tesis, la exigencia de no negatividad en la sucesión de variables que modelan problemas de colapso producidas por el crecimiento de una grieta, puede ser obviada para otro tipo de fenómeno. En efecto, para problemas de crecimiento del combustible producido por la hojarasca de grandes bosques, cuya renovación se produce por el incendio natural al llegar a un umbral determinado, entendiéndose que por problemas de erosión o intervención humana pueda ocurrir un decrecimiento en el nivel de hojarasca, y de este modo no es exigible que las variables, que esta vez modelarían el nivel de volumen de hojarasca, necesariamente deben ser no negativas. De esta forma, pensamos que la distribución *BS* estaría en condiciones de modelar los incendios naturales de los bosques.

Referencias bibliográficas

- 1 Abramowitz, M and Setung, I.A. (1972).Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. 9th printing.*New York: Dover*,p.928.
- 2 Birnbaum , Z. W. and Saunders, S. C. (1969a). A new family of life distributions. *Journal of Applied Probability* 6 : 319-327
- 3 Birnbaum , Z. W. and Saunders, S. C. (1969b). Estimation for a family of life Distributions With Applications to Fatigue. *Journal Applied Probability*, 6 : 328-347.
- 4 Chang , D.S, Tang ,L.C. (1993).Reliability bounds and critical time for the B irnbaum-Saunders distribution.*Communications in Statistics:Theory and Methods* 23 : 2853-2863.
- 5 Chang , D.S,Tang , L.C. (1994).Percentile bounds and tolerance limits for the Birnbaum -Saunders distribution. *Communications in Statistics:Theory and Methods* 23. 2853-2863.
- 6 Deligonul, Z.S.(1985).An approximate solution of the integral equation of renewal theory. *Journal of Applied Probability* 22: 926-931
- 7 Desmond, A. F. (1985). Stochastic models of failure in random environments. *Canadian Journal of Statistics* 13: 171 -183.
- 8 Desmond, A. F. (1986). On the Relationship Between two Fatigue - life Models. *IEEE Transaction on Reliability* 35: 167-169.
- 9 Diaz-García,J.A. and Leiva-Sánchez,V.(2005).A new family of life distributions based on the contoured elliptically distributions. *Journal of Statistical Planning and Inference*,128 (2) ,445-457.
- 10 Dupuis,D.J. and Mills,J.E. (1998).Robust estimation of the Birnbaum- Saunders distribution. *IEEE Transaction on Reliability* 47: 88-95.
- 11 Engelhardt,M.,Bain, L . J. and Wright, F.T.(1981).Inferences on the Parameter of the Birnbaum- Saunders Fatigue life Distribution Based on Maximun Likelihood Estrimation. *Technometrics*, 23 (3),251 - 256.
- 12 Freundenthal, A.M. and Shinozuka, M. (1961). Structural Safety under Conditions of Ultimate Load Failure y Fatigue. *Technica Report. Wright Air Development Division, Wright Air Force Base*: 61-77. Dayton, OH.
- 13 Karlin, S. and Taylor, H. M. (1975). A Firts Course in Stochastic Processes. *Academic Press, New York*.
- 14 Kenney, J. F.and Keeping, E. S. (1951). Mathematics of Statistics. *Pt. 2, 2nd ed. Princeton, NJ: Van Nostrand*, p.27.
- 15 Kenney, J. F. and Keeping , E. S. (1961). Mathematics of Statistics. *Pt.1,3rd ed. Princeton, NJ: Van Nostrand* : 99-102.
- 16 Ng, H.K.T., Kundu, D. , Balakrishnan, N. (2003). Modified moment estimation for the two - parameter Birnbaum - Saunders distribution. *Computational Statistics Data Analysis*. 43 , 283-298.
- 17 Rieck, J.R. (1995).Parametric estimation for the Birnbaum- Saunders distribution based on symmetrically censored samples. *Communicationsin Statistics : Theory and Meth-*

ods, 24 , 1721 -1736.

- 18 Rieck, J.R. (1999).A moment -generating function with application to the Birnbaum-Saundersdistribution. *Communicationsin Statistics : Theory and Methods*, 28, 2213-2222.
- 19 Rieck, J.R. (2003).A comparison of two random number generators for the Birnbaum - Saunders distribution. *Communicationsin Statistics : Theory and Methods*, 32, 929-934.
- 20 Sánchez, V.L , Sifuentes, M. C., Cuello, E. E. (2002). Caracterización y Aplicación de la Distribución Birnbaum Saunders como Modelo de Tiempos de Vida. *Editorial de la Universidad Autonoma Agraria Antonio Narro, Mexico*, p.26.
- 21 Vilca -Labra, F. and Leiva - Sánchez , V. (2006). A New Fatigue Life Model Based on the Family of skew - Elliptical Distributions. *Communicationsin Statistics : Theory and Methods*, 35 (2), 229 -244.
- 22 Wolkowicz, H and Styan, G. P. H. (1980). Bounds for eigenvalues using traces, *Linear Algebra and Its Applications* 29: 471-506.