Los Modelos Trigonométricos

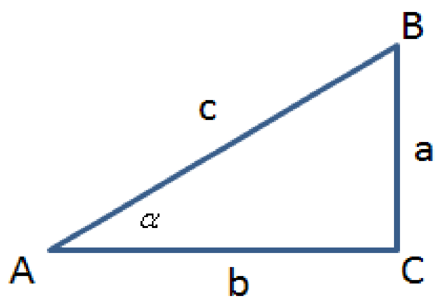
Eliseo Martínez, Manuel Barahona

1. Introducción

Normalmente, por motivos históricos, y de acuerdo al itinerario seguido por la humanidad en la invención de la trigonometría, se estudian primero las razones trigonométricas y posteriormente las funciones trigonométricas; cuestiones que de hecho **son la misma cosa**.

2. Las razones trigonométricas: los modelos estáticos

Dado un triángulo ABC se pueden definir seis razones trigonométricas entre sus lados, para cada uno de sus ángulos agudos. En la siguiente tabla se definen dichas razones para el ángulo α descrito en la Figura 1.



$Figura 1$

$$\begin{aligned}
sen\,\alpha &= \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{a}{c}\\
\cos\alpha &= \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{b}{c}\\
\tan\alpha &= \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{a}{b}\\
\csc\alpha &= \frac{hipotenusa}{cateo\ opuesto} = \frac{c}{a}\\
\sec\alpha &= \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente} = \frac{c}{b}
\end{aligned}$$

$$\cot\,\alpha \quad = \quad \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto} = \frac{b}{a}$$

Ejemplo 1

Considere el triángulo rectángulo de la Figura 1 y suponga que los catetos menor, mayor e hipotenusa miden 8, 15 y 17 centímetros respectivamente. Halle el valor aproximado (a un decimal por defecto) de seno, coseno y tangente del ángulo α.

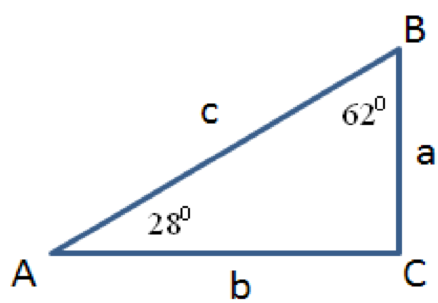
Solución. De acuerdo a las definiciones dadas resulta que

$$a)\ \ sen\,\alpha = \frac{8}{17} \approx 0.4 \qquad b)\ \ \cos\,\alpha = \frac{15}{17} \approx 0.6 \qquad c)\ \ tg\,\alpha = \frac{8}{15} \approx 0.5$$

En lo que sigue estudiaremos algunas propiedades de las razones trigonométricas que nos permitirán resolver una gran variedad de problemas de otras disciplinas.

Ejemplo 2

En el triángulo rectángulo ABC de la Figura 2 se tiene que $sen\,28^0 = \cos\,62^0 = \frac{a}{c}$, $\tan\,28^0 = \cot\,62^0 = \frac{a}{b}$, $\sec\,28^0 = \csc\,62^0 = \frac{c}{b}$



$Figura\ 2$

A las funciones seno y coseno; tangente y cotangente; secante y cosecante, se les llama cofunciones a una de la otra.

D las relaciones entre los lados del triángulo, se desprenden las siguientes **relaciones entre las funciones**. Considerando el triángulo rectángulo ABC, de la Figura 1, se tiene:

$$\begin{aligned} a)\ \ sen\,\alpha &= \frac{a}{c} = \frac{1}{\frac{c}{a}} = \frac{1}{\csc\,\alpha} \\ b)\ \ \cos\,\alpha &= \frac{b}{c} = \frac{1}{\frac{c}{b}} = \frac{1}{\sec\,\alpha} \\ c)\ \ tg\,\alpha &= \frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}} = \frac{1}{\cot\,\alpha} \end{aligned}$$

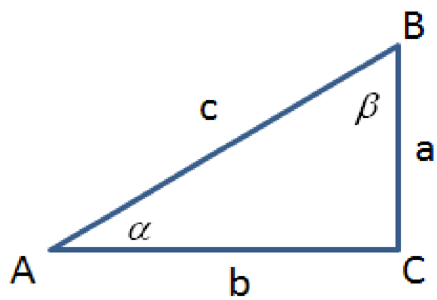
Del mismo triángulo se obtiene también que:

$$\begin{aligned} d)\ \frac{sen\,\alpha}{\cos\,\alpha} &= \frac{a/c}{b/c} = \frac{a}{b} = tg\,\alpha \\ e)\ \frac{\cos\,\alpha}{sen\,\alpha} &= \frac{b/c}{a/c} = \frac{b}{a} = ctg\,\alpha \end{aligned}$$

Estas igualdades entre funciones se laman **identidades trigonométricas**. Lo que define a una identidad trigonométrica es que la igualdad propuesta es cierta para todos los ángulos del dominio de la función. En este caso *para todos los ángulo agudos*.

Ejemplo 3

Considere en triángulo rectángulo ABC de la Figura 3 y demuestre que $sen^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$.



$Figura\ 3$

Solución. El teorema de Pitágoras nos asegura que $a^2+b^2 = c^2$. Dividiendo esta expresión por c^2 resulta

$$\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}=1$$

esto significa que

$$i)\quad \left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1$$

Del mismo triángulo se deduce que:

$$ii)\quad sen\,\alpha=\frac{a}{c}\ \text{, por lo tanto }\ sen^2\alpha=\left(\frac{a}{c}\right)^2$$

$$iii)\quad \cos\,\alpha=\frac{b}{c}\text{, por lo tanto }\ \cos^2\alpha=\left(\frac{b}{c}\right)^2$$

Reemplazando las igualdades $ii)$ y $iii)$ en la expresión $i)$ se obtiene que

$$(*)\quad sen^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

La identidad (*) significa que la igualdad se mantendrá, cualquiera que sea el ángulo α al cual se le apliquen ambas funciones.

Conviene aclarar algunas convenciones de notación. Así por ejemplo

$$a)\ sen^n\alpha=(sen\,\alpha)^n\quad b)\ \cos^n\alpha=(\cos\,\alpha)^n\quad c)\ tg^n\alpha=(tg\,\alpha)^n$$

De tal modo que, en particular, se tiene que

$$a)\ sen^2\alpha=(sen\,\alpha)^2\quad b)\ \cos^2\alpha=(\cos\,\alpha)^2\quad c)\ tg^2\alpha=(tg\,\alpha)^2$$

Así por ejemplo, de $(sen\ 18^0)^2+(\cos\ 18^0)^2$, resulta:

$$(sen\ 18^0)^2+(\cos\ 18^0)^2\approx(0.309)^2+(0.951)^2=0.0954+0.9044\approx 1$$

3. Ejercicios propuestos

1 Considere un triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5 cms. Calcule las seis razones trigonométricas de los ángulos agudos.

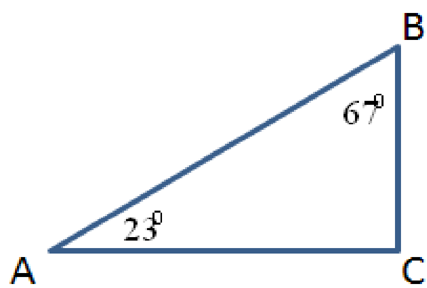
2 Halle los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos α y β del triángulo rectángulo de la Figura 3.

3 Determina los valores de todas las funciones trigonométricas del ángulo α, de un triángulo rectángulo, dado que $sen\,\alpha = \frac{9}{15}$

4 Halle los valores de todas las funciones trigonométricas del ángulo α, de un triángulo rectángulo, si $\cos\,\alpha = 0.5$

5 Considere el triángulo rectángulo de la Figura 4 y verifique las igualdades siguientes

$$a)\ sen\,\alpha \cdot \csc\,\alpha = 1 \quad b)\ \cos\,\alpha \cdot \sec\,\alpha = 1 \quad c)\ tg\,\alpha \cdot ctg\,\alpha = 1$$



$Figura\ 4$

6 Verifique con el software DERIVE que:

$$\begin{aligned} a)\quad sen^2 32^0 + \cos^2 32^0 &= 1 & b)\ sen^2 58^0 + \cos^2 58^0 = 1 \\ c)\quad sen^2 17^0\,35' + \cos^2 17^0\,35' &= 1 & d)\ sen^2 1^0 + \cos^2 1^0 = 1 \end{aligned}$$

7 Haga un resumen de las identidades trigonométricas básicas estudiadas en el **Ejemplo 2** y demuestre la veracidad de las siguientes igualdades

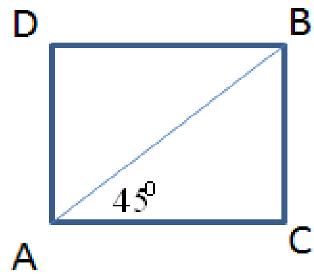
a) $1 + ctg^2 x = \csc^2 x$ b) $1 + tg^2 x = \sec^2 x$ c) $sec\ x + ctg\ x = csc\ x$

c) $ctg\ x + \sec\ x \cdot sen\,x = 1$ d) $(1 - \cos^2 x)\ \csc\ x = 1$ f) $(1 - sen^2\,x)\ \sec\ x = 1$

g) $cos\,x\sqrt{ctg^2 x + 1} = \sqrt{\csc^2 x - 1}$ h) $tg^2 x - ctg^2 x = \sec^2 x - \csc^2 x$

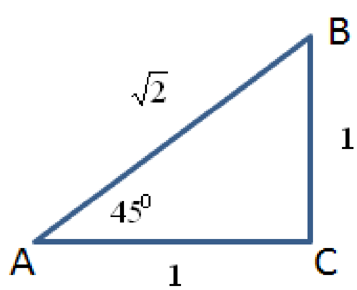
4. Razones de ángulos especiales

En una gran cantidad de problemas es necesario comocer los valores de las funciones trigonométricas para ángulos de 35^0, 45^0 y 60^0. Consideremos el cuadrado ABCD de la Figura 5, cuyos lados miden la unidad.



$Figura$ 5

La Figura 6 muestra el triángulo isósceles ABC, del cual se pueden calcular las funciones trigonométricas para el ángulo de 45^0. Conviene precisar que los valores de las funciones no variarán si los lados del cuadrado ABCD tiene otras dimensiones.



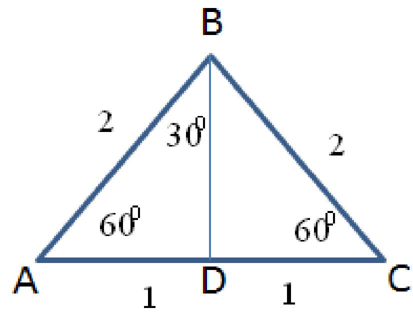
$Figura$ 6

Aplicando la definición de cada una de las funciones al ángulo de 45^0 resulta:

$$a)\ sen\,45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad b)\ \cos\,45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad c)\ tg\,45^0 = 1$$

$$d)\ \csc\,45^0 = \sqrt{2} \qquad b)\ \sec\,45^0 = \sqrt{2} \quad c)\ ctg\,45^0 = 1$$

Para calcular las funciones trigonométricas de los ángulos 30^0 y 60^0, se recurre a un triángulo equilátero como el de la Figura 7



$Figura\ 7$

Como las longitudes de los lados del triángulo no afectan las razones entre ellos, para mayor comodidad en los cálculos se han elegido dos unidades por lado. Del triángulo de la Figura 9 se desprende el triángulo rectángulo ADB

La longitud del lado DB (que es la altura del triángulo equilátero ABC) se puede calcular utilizando el Teorema de Pitágoras. Y aplicando las definiciones de las funciones se obtienen los resultados de la tabla siguiente:

	sen	cos	tg	csc	sec	ctg
30^0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
45^0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60^0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$Tabla\ \ 1$

Para calcular los valores de las funciones para ángulos agudos cualesquiera debemos recurrir a la calculadora manual. Cuando se efectuen dichas operaciones debe tenerse cuidado en que la calculadora esté en **modo DEG.** Si usted quiere hacer los cálculos en el software DERIVE por defecto lo calcula en radianes, para ”forzarlo” a calcular en grados sexagesimales se debe poner, a manera de ejemplo para calcular sen (45^0), $sin(45\,\mathrm{deg})$.

Ejemplo 4

Calcule las funciones seno, coseno y tangente de 27^0 utilizando el software DERIVE.

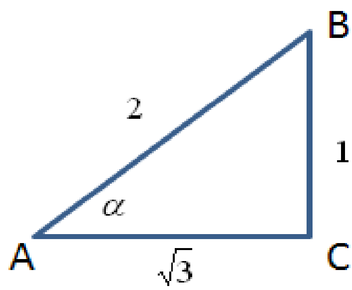
Solución. Escriba [sin(27 deg), cos(27 deg), tan(27 deg)], oprima enter y luego $\approx$ (opción APROXIMAR), y aparecerá en la pantalla:

```
[SIN(27·°), COS(27·°), TAN(27·°)]

[0.4539904997, 0.8910065241, 0.5095254494]
```

¿Cómo saber la medida del ángulo cuando se conoce el valor de la razón trigonométrica?

Consideremos el triángulo rectángulo ACB de la Figura 8 e intentemos hallar la medida del ángulo α.



$Figura\ 8$

De la Figura 8 se desprende que $sen\,\alpha = \frac{1}{2}$. Por otra parte la Tabla 1 nos muestra que si el valor de la función seno es $\frac{1}{2}$, entonces el ángulo mide 30^0. Dicho de otra forma:

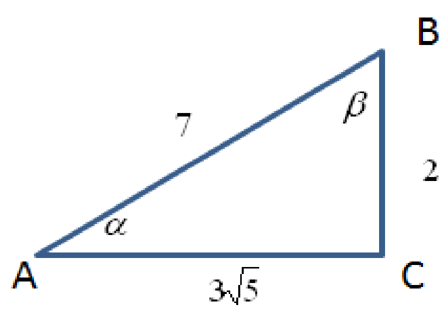
$$\text{Si } sen\,\alpha = \frac{1}{2}, \text{ entonces } \alpha = 30^0$$

Pero, ¿qué sucede cuando el triángulo, al cual queremos comocer sus ángulos o sus lados no es equilatero ni rectángulo isosceles?

El algoritmo para calcular la medida de los ángulos internos de un triángulo cuando se trata de triángulos rectángulos cualesquiera se muestra en el ejemplo 5.

Ejemplo 5

Considere el triángulo de la Figura 9 y determine la medida de los ángulos α y β.



$Figura\ 9$

Solución. Aunque podemos usar cualquiera de las funciones usaremos en ambos casos la función seno. En efecto, puesto que $\sin\ \alpha = \frac{2}{7}$, se tiene que

a) Escribimos en el DERIVE,

$$Angle := Degree$$

(para indicar que trabajaremos con grados sexagesimales), luego ponemos la opción

$$asin(2/7)$$

esto es en pantalla

```
Angle := Degree
```

$$\mathrm{ASIN}\left(\frac{2}{7}\right)$$

y aparecerá el resultado luego de oprimir $\approx$ 16,601 (grados). De la misma forma

$$a\sin(\frac{3\sqrt{5}}{7})$$

esto es

$$\mathrm{ASIN}\left(\frac{3\cdot\sqrt{5}}{7}\right)$$

y obtenemos, luego de oprimir $\approx$, el resultado de 73,398 (grados).

Note que la suma de ambos ángulos agudos es un poco menor de 90^0. Esto se debe a que todos los cálculos han sido aproximados a cuatro decimales, por defecto.

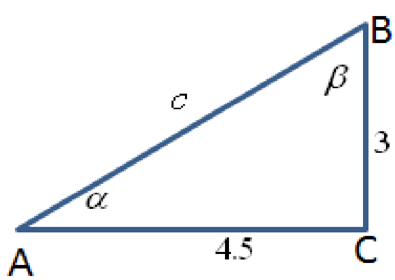
5. Ejercicios propuestos

1 Halle el valor numérico de las siguientes expresiones

$$a)\quad tg^2\,60^0 + 2tg^2\,45^0 \qquad b)\;\; tg^2\,45^0\cdot sen\,60^0\cdot tg\,30^0\cdot tg^2\,60^0$$

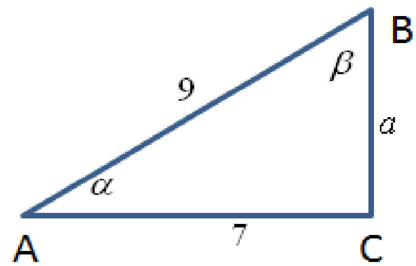
$$c)\;\; \cos\,60^0 - tg^2\,45^0 + \frac{3}{4}\,tg^2\,30^0 + \cos^2\,30^0 - sen\,30^0$$

2 Considere los triángulos ABC de la Figura 10 y determine el lado c y los ángulos α y β.



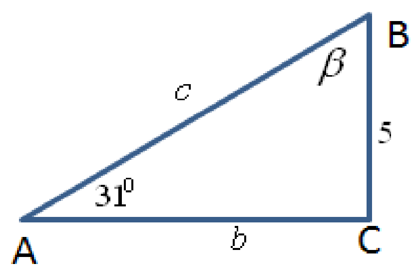
$Figura$ 10

3 Considere el triángulo rectángulo de la Figura 11 y determine el lado a y los ángulos α y β.



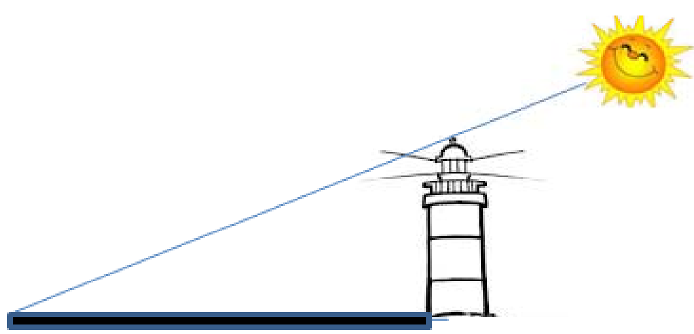
$Figura$ 11

4 Considere el triángulo rectángulo de la Figura 12 y determine la medida del ángulo β y las longitudes de los lados b y c.



$Figura$ 12

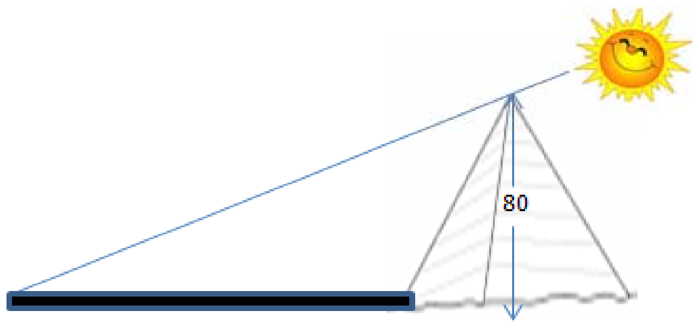
5 ¿Cuél es la altura del faro de la Figura 13 que proyecta una sombra de 300 metros cuando el sol se ha elevado 30^0 sobre el horizonte?



$Figura$ 13

6 La pirámide de 80 metros de altura, Figura 14, proyecta una sombra de 100 metros de

longitud. ¿Cuál es el ángulo de elevación del sol?



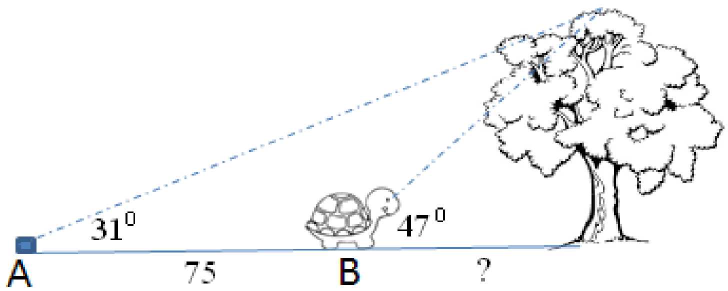
$Figura$ 14

7 La escalera de la Figura 15 está apoyada contra la pared de una casa de modo que desde el pie de la escalera a la pared hay dos metros. ¿A qué altura del suelo se encuentra el extremo superior de la escalera y cuál es su longitud si forma un ángulo de 58^0 con el suelo?

$Figura$ 15

8 Desde un punto colocado a una distancia de 50 metros de la base de una torre se halló que el ángulo de elevación del extremo superior de la torre es de 45^0. Calcule la altura de la torre.

9 Considere el árbol de la Figura 16^o y una tortuga que se mueve en dirección al tronco desde el punto A al punto B. Halle la altura del árbol si el ángulo de elevación de su extremo superior crece desde 31^0 hasta 47^0 cuando la tortuga avanza 75 metros desde A hasta B.



$Figura$ 16

10 La base de un triángulo isósceles mide 20 centímetros y los ángulos de la base miden 48^0. Halle la longitud de los lados iguales.

11 Calcule el área de un triángulo rectángulo si un cateto mide 12.5 centímetros y un ángulo mide 28^0.