La derivada de las funciones trascendentes

Manuel Barahona, Eliseo Martínez

Diciembre 2015

Muchos fenómenos de la naturaleza son modelados mediante funciones exponeciales, logarítimicas, trigonométricas y combinaciones de ellas. De esto se desprende la importancia de poder calcular la derivada de estas funciones, que en lo sucesivo llamaremos **funciones trascendentes**.

1. La derivada de la función logaritmo

La función logaritmo natural $f(x) = \ln x$ tiene una derivada sencilla y está basada en el hecho de que

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \tag{1}$$

Formemos el cociente de Newton $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ y usemos las propiedades de los logaritmos, tal como se muestra a continuación

$$\begin{aligned} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} &= \frac{\ln(x+\Delta x)-\ln(x)}{\Delta x} \\ &= \frac{1}{\Delta x}\ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right) = \ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} \end{aligned}$$

En consecuencia se tiene que

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} \tag{2}$$

Efectuando el cambio de variable $n = \frac{x}{\Delta x}$, es decir, $\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{n}$ y al mismo tiempo, $\frac{1}{\Delta x} = \frac{n}{x}$, y reemplazándolas en la expresión (2) resulta[1]

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} &= \lim_{n \to \infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{x}} \\ &= \lim_{n \to \infty} \left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

Utilizando ahora el límite en 1), se obtiene

$$\lim_{\Delta x \to o} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \ln e^{\frac{1}{x}}$$

Aplicando la propiedad de los logaritmos resulta que

$$\ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\ln e = \frac{1}{x}$$

[1] En efecto, como $n = \frac{x}{\Delta x}$, entonces si $\Delta x \to 0$ es claro que $n \to \infty$. Y viceversa.

En consecuencia la derivada de la función logaritmo natural es

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

Ejemplo 1

Calcule la derivada de la función $y = 3x \ln x$

Solución. Aplicando la derivada de un producto se tiene

$$y' = 3x \cdot \left(\frac{1}{x}\right) + 3\ln x = 3(1 + \ln x)$$

PAra derivar la función logaritmo natural, cuando el argumento es otra función, se recurre a la regla de la cadena. Esto es, si $u = u(x)$ es una función derivable en x, entonces

$$\frac{d}{dx}\left[\ln u\right] = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

Ejemplo 2.

Derive la función $y = \ln\sqrt{x^2+3}$

Solución. Aplicando la regla de derivación de la función logaritmo natural, se tiene

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}\right)\frac{d}{dx}\sqrt{x^2+3} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}\right)\frac{1}{2\sqrt{x^2+3}}(2x) = \frac{x}{x^2+3} \end{aligned}$$

Con frecuencia conviene, antes de derivar, reescribir la función utilizando las propiedades de los logaritmos. Esto es particularmente útil cuando la función que se quiere derivar es muy complicada. En relación con el ejemplo anterior, podemos reescribir la función en la forma siguiente

$$y = \ln\sqrt{x^2+3} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}\ln(x^2+3)$$

La derivada de esta última función es más fácil de realizar. En efecto:

$$y' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+3}\frac{d}{dx}\left[x^2\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+3}(2x) = \frac{x}{x^2+3}$$

Se puede demostrar, mediante las propiedades de cambio de base de logaritmos, que la derivada de la función logaritmo, con una base cualquiera, es la siguiente

$$\frac{d}{dx}\left[\log_a x\right] = (\log_a e)\frac{1}{x}$$

Ejemplo 3.

Halle la derivada de la función

$$f(x) = \log_a(x)\cdot x^5$$

Solución. Observe que la función $f(x)$ es un producto de dos funciones. Aplicando la derivada de un producto se tiene

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x}\log_a e\right)\cdot x^5 + \log_a x \cdot 5x^4$$

Cuando el argumento del logaritmo es otra función debemos derivar utilizando la regla de la cadena.

$$\frac{d}{dx}\left[\log_a u\right] = \frac{\log_a e}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

Ejemplo 4.

Hallar la derivada de la función $f(x) = \log_2(x^2 + 2x + 3)$

Solución. Derivando

$$f'(x) = (\log_2 e)\left(\frac{1}{x^2 + 2x + 3}\right)(2x + 2)$$

2. Derivada de la función exponencial

Para hallar la fórmula de la derivada de la función $y = e^x$ escribimos la igualdad

$$\ln e^x = x$$

y derivamos con respecto a la variable x. Usando la regla de la cadena se obtiene

$$\frac{d}{dx}\left[\ln e^x\right] = \frac{d}{dx}\left[x\right] \Leftrightarrow \frac{1}{e^x}\frac{d}{dx}\left[e^x\right] = 1$$

Despejando la expresión $\frac{d}{dx}\left[e^x\right]$ de la segunda equivalencia, resulta

$$\frac{d}{dx}\left[e^x\right] = e^x$$

Las derivadas de las otras funciones exponenciales son las siguientes

a) $\frac{d}{dx}\left[e^{kx}\right] = ke^{kx}$ b) $\frac{d}{dx}\left[a^x\right] = \ln(a)\, a^x$

c) $\frac{d}{dx}\left[e^u\right] = e^u \cdot \frac{du}{dx}$ d) $\frac{d}{dx}\left[e^u\right] = (\ln a)\, a^u \cdot \frac{du}{dx}$

Ejemplo 5

Halle las derivadas de las funciones siguientes: a) $y = e^{4x^2+6}$. b) $y = 2^{7x^2-1}$

Solución. Aplicando las fórmulas correspondientes, resulta:

a) $y' = e^{4x^2+6} \cdot (8x) = 8x \cdot e^{4x^2+6}$

b) $y' = (\ln 2) \cdot 2^{7x^2-1}(14x) = 14x(\ln 2) \cdot 2^{7x^2-1}$

Ejemplo 6

Derive la función de **densidad normal estándar de probabilidad**[2]

$$n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Solución. Aplicando la fórmula correspondiente se tiene:

$$n'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}(-x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

[2] Esta función de densidad es una de las más utilizadas en la modelación de fenómenos naturales, como el movimiento de partículas de polen en un vaso de agua, como el modelamiento para explicar la "valatilidad" en el precio de las acciones del mercado bursatil, así como encontrar en probabilidad partículas subatómicas en la mecánica cuántica, tanto como saber porcentualmente la cantidad de jovenes que están en un determinado rango de estatura. Sin aplicar esta función de densidad, la vida practicamente sería tediosa y aburrida, y sin progreso.

Podemos observar que esta derivada se anula en $x = 0$, indicando con esto que la recta tangente al punto $(0, n(0)) = (0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}})$ es paralela al eje horizontal X, y en consecuencia como $n(x)$ es siempre positiva, se tiene que el punto $(0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}})$ es un punto máximo.

3. La derivada en el crecimiento exponencial

Hemos visto que una cantidad $Q(t)$ que crece de acuerdo con una ley de la forma $Q(t) = Q_0\, e^{k\cdot t}$ donde Q_0 y k son constantes positivas, se dice que experimenta un crecimiento exponencial. Verenos a continuación que si una cantidad crece exponencialmente, su ritmo de crecimiento es proporcional a su tamaño.

La razón instantanea de cambio de Q con respecto a t es la derivada

$$Q'(t) = k\, Q_0\, e^{k\cdot t} \tag{3}$$

Esto nos dice que la razón instantanea de cambio $Q'(t)$ es proporcional al "tamaño" de $Q(t)$, siendo precisamente k la constante de proporcionalidad. Observemos que la ecuación (3) se puede escribir como

$$Q'(t) = k\, Q(t) \tag{4}$$

donde $Q(t) = Q_0\, e^{k\cdot t}$.

La expresión (4) es una clasica ecuación diferencial donde se pide encontrar la función $Q(t)$ que satisfaga esta ecuación. Dicho de otra forma, ¿Cual es la expresión de $Q(t)$ para que ocurra la igualdad (4)? La solución es

$$Q(t) = C\, e^{k\, t}$$

En efecto, si derivamos esta expresión obtenemos que se satisface la ecuación (4)

4. La derivada de las funciones trigonométricas

En lo que sigue deduciremos la fórmula de la derivada de la función $f(x) = sen\,(x)$ utilizando la definición. De acuerdo a esto se tiene sucesivamente que:

$$f(x + \Delta x) = sen(x + \Delta x) = sen\, x\, \cos\, \Delta x + \cos\, x\, sen\, (\Delta x)$$

luego

$$f(x + \Delta x) - f(x) = sen\, x\, \cos\, \Delta x + \cos\, x\, sen\, (\Delta x) - sen\, x$$

es decir

$$f(x + \Delta x) - f(x) = + \cos\, x\, sen\, (\Delta x) - sen\, x(1 - \cos\, \Delta x)$$

En consecuencia

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \cos\left(\frac{sen\, x}{\Delta x}\right) - sen\, x\left(\frac{1 - \cos\, \Delta x}{\Delta x}\right)$$

por lo tanto

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\cos\left(\frac{sen\, x}{\Delta x}\right) - sen\, x\left(\frac{1 - \cos\, \Delta x}{\Delta x}\right)\right]$$

de lo cual se desprende que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = (\cos\, x)(1) - (sen\, x)(0) = \cos\, x$$

En consecuencia

$$\frac{d}{dx}\,[sen\, x] = \cos\, x$$

Observe que hemos usado los hechos siguientes:

$$a)\ \lim_{\Delta x\, \to\, 0} \frac{sen\, x}{\Delta x} = 1 \quad ; \quad b)\ \lim_{\Delta x\, \to\, 0} \frac{1 -\ \cos\, \Delta x}{\Delta x} = 0$$

que usted puede perfectamente comprobar mediante el software DERIVE.

La obtención de la derivada del resto de las funciones trigonométricas no varía sustancialmente. Sin embargo puede resultar más sencillo utilizar las identidades trigonométricas para llegar al mismo resultado. Así por ejemplo

$$(sen\, x)^2 + (\cos\, x)^2 = 1$$

entonces derivando esta igualdad se tiene que

$$\frac{d}{dx}\left[(sen\, x)^2 + (\cos\, x)^2\right] = \frac{d}{dx}\,[1] = 0$$

y la derivada de la primera igualdad de esta identidad, apicando la regla de la cadena y el resultado anterior, es

$$2\,(sen\, x)\,(\cos\, x) + 2(\cos\, x)\,\frac{d}{dx}\,[\cos\, x] = 0$$

despejando de esta igualdad $\frac{d}{dx}\,[\cos\, x]$, obtenemos la fórmula

$$\frac{d}{dx}\,[\cos\, x] = -sen\, x$$

Ahora si consideramos la identidad

$$tg\, x = \frac{sen\, x}{\cos\, x}$$

podemos aplicar la regla para derivar un cosiente y obtener

$$\frac{d}{dx}\,[tg\, x] = \frac{\cos\, x\ \ \cos\, x - sen\, x\,(-\,sen\, x)}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2} = (\sec x)^2$$

A continuación se da, sin demostración, un resumen de las fórmulas de las derivadas de las funciones trigonométricas.

$$\begin{aligned} a)\ \frac{d}{dx}\,[sen\, x] &= \cos\, x; \qquad b)\ \frac{d}{dx}\,[\cos\, x] = -\ sen\, x \\ c)\ \frac{d}{dx}\,[tg\, x] &= (\sec\, x)^2 \quad d)\ \frac{d}{dx}\,[ctg\, x] = -(\text{cosec}\ x)^2 \\ e)\ \frac{d}{dx}\,[\sec\, x] &= \sec x\, tg\, x \quad f)\ \frac{d}{dx}\,[\text{cosec}\, x] = -\text{cosec}\, x\, ctg\, x \end{aligned}$$

Ejemplos 7.

Hallar la derivada de las funciones siguientes: $a)\ y = \cos\, 2x^2 \quad b)\, y = tg^3 2x \quad c)\ y =$

cosec$(\frac{x}{3})$ $\quad d)\ y = e^{-2x} ctg\, x$
Solución.

a) Supongamos que $u = 2x^2$. Aplicando la fórmula correspondiente junto a la regla de la cadena resulta:
$$y' = sen\, u \frac{du}{dx} = -sen\, 2x^2\, 4x$$

b) Si hacemos $u = 2x$, resulta
$$y' = 3tg^2 u \frac{du}{dx} = 6tg^2 2x$$

c) Suponiendo que $u = \frac{x}{3}$, resulta
$$y' = -\text{cosec}\ u\ ctg\, u \frac{du}{dx} = -\frac{1}{3}\text{cosec}\, \frac{x}{3}\ ctg\, \frac{x}{3}$$

d) Aplicando la regla de la cadena del producto de dos funciones, se tiene
$$y' = e^{-\,2x}(-\,\text{cosec}^2\, x) + (ctg\, x)(e^{-2x})(2) = -e^{-\,2x}(\text{cosec}^2 x + 2\, ctg\, x)$$