

Reglas de derivación

Eliseo Martínez, Manuel Barahona

Diciembre 2015

1 Derivación de funciones algebraicas

En los apuntes de "Derivadas para estudiantes de economía" vimos que para analizar muchos fenómenos de la naturaleza es necesario estudiar el concepto de derivada. Estudiamos el concepto de derivada por medio de límites. Sin embargo resultaría demasiado engorroso tener que calcular un límite cada vez que estamos resolviendo un problema. Por esta razón, desarrollaremos reglas prácticas que nos permitirán calcular derivadas más fácilmente y posteriormente utilizaremos el DERIVE (o cualquier otro software) para calcular dichas derivadas "si necesidad de pensar".

1.1 La derivada de una función constante

La derivada de una función constante es cero. En símbolos

$$\frac{d(c)}{dx} = 0, \text{ donde } c \text{ es un número constante}$$

Este resultado es trivial, solo pensando en que la función $f(x) = c$ su crecimiento o decrecimiento es nulo. En efecto

$$f(x+h) - f(x) = c - c = 0$$

1.2 La derivada de una potencia

La derivada de una función potencia $f(x) = x^n$ es

$$\frac{d(x^n)}{dx} = n x^{n-1}$$

donde n es un número entero positivo.

1.3 La derivada de una función por un escalar

Si c es una constante entonces la derivada de producto $c \cdot f(x)$ es:

$$\frac{d(c \cdot f(x))}{dx} = c \cdot \frac{d(f(x))}{dx}$$

Su demostración es rápida y sencilla

$$c \cdot f(x+h) - c \cdot f(x) = c \cdot (f(x+h) - f(x))$$

y el resultado sigue.

1.4 La derivada de una suma (resta) de funciones

La derivada de una suma (o resta) de dos funciones es igual a la suma (o resta) de sus derivadas.

$$\frac{d}{dx} [f(x) \pm g(x)] = \frac{d(f(x))}{dx} \pm \frac{d(g(x))}{dx}$$

1.5 La derivada de un producto de funciones

La derivada del producto de dos funciones es igual al producto de la primera función por la derivada de la segunda, más la segunda función por la derivada de la primera

$$\frac{d}{dx} [f(x) \cdot g(x)] = f(x) \cdot \frac{d(g(x))}{dx} + \frac{d(f(x))}{dx} \cdot g(x)$$

1.6 La derivada de un cociente de funciones

La derivada del cociente de dos funciones es igual al producto de la derivada del numerador por el denominador menos el producto del numerador por la derivada del denominador, dividido por el denominador al cuadrado

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

2 La regla de la cadena

Es esencialmente el cálculo de la derivada de una composición de funciones. Observe usted la función e^{x^2} , que usted la puede considerar como la composición entre la función $f(x) = x^2$ y la función $g(x) = e^x$, esto es $g(f(x)) = e^{f(x)} = e^{x^2}$. Ahora si conocemos la derivada de $f(x)$ y $g(x)$ ¿cómo será la derivada de $g(f(x))$? La respuesta es

$$\frac{d}{dx} [g(f(x))] = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

De igual forma si tenemos una composición de la forma $g(f(h(x)))$, entonces

$$\frac{d}{dx} [g(f(h(x)))] = g'(f(h(x))) \cdot f'(h(x)) \cdot h'(x)$$

de esta manera singular de "encadenar" el operador tilde ' es que viene su nombre de "regla de la cadena"