Ecuaciones exponenciales

Eliseo Martínez, Manuel Barahona

1994-2015

Abstract

Estos apuntes furon realizados por los autores alrededor del año 1994. Los volvemos a presentar este año del 2015. Digamos que son apuntes "peregrinos" y que ojalá sigan siendo peregrinos por mucho tiempo.

Hasta ahora hemos visto la necesidad de resolver ecuaciones lineales y cuadráticas con el fin de hallar puntos donde dichas funciones cortan al eje **X**. Esta es una cuestión absolutamente necesaria cuando se quiere trazar[1] el gráfico de dichas funciones, y tener una idea de su comportamiento. En lo que sigue trataremos de resolver ecuaciones de naturaleza exponencial.

Se llama ecuación exponencial a toda ecuación en la cual la incógnita figura en el exponente.

Ejemplo 1.

Las siguientes son ecuaciones exponenciales: a) $2^x = 7$ b) $5^{\frac{3x-2}{4}} = 4^{x+1}$

En la resolución de este tipo de ecuación usaremos todas las propiedades de la función exponencial y, en particular, las que se desprenden del hecho de que dica función sea estrictamente creciente o estrictamente decreciente[2], esto es:

$$(1)\ a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2 \qquad (2)\ a^x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \quad (3)\ a^x = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

Existen, al menos, tres tipos de ecuaciones, en las cuales la incógnita está en el exponente.

[1] Obviamente es un recurso didáctico ya caduco, toda vez que el alumno dibujará con precisión que desee cualquier gráfica, y sobre esta gráfica hará el análisis pertinente, y las herramientas que aquí se entregan estimamos son las pertinentes.

[2] Estamos suponiendo que cualquiera sea la base que utilicemos esta debe ser positiva.

1 Ecuaciones de la forma $a^x = b$

Para resolver las ecuaciones de este tipo debemos expresar el número b como una potencia de base a.

Ejemplo 2.

Resuelva las ecuaciones siguieentes: $a)\ 2^x = 8$; $b)\ \left(\sqrt{3}\right)^x = 27$; $c)\ 5^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{25}$

a) Utilizando la propiedad (1) resulta: $2^x = 8 \Leftrightarrow 2^x = 2^3 \Leftrightarrow X = 3$.

En consecuencia la solución de la ecuación es $x = 3$. Tal como en las ecuaciones lineales y cuadráticas, se puede verificar la solución reemplazando el valor de x en la ecuación propuesta.

b) Utilizando la misma propiedad se tiene:

$$\left(\sqrt{3}\right)^x = 27 \Leftrightarrow \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^x = 3^{\frac{x}{2}} = 3^3 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 3$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación es $x = 6$.

Finalmente: c) $5^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{25} \Leftrightarrow 5^{\frac{1}{x}} = 5^{-2} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = -2$. Por lo tanto $x = -\frac{1}{2}$. Comprobando esta solución tenemos que

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$$

lo que es correcto.

2 Ecuaciones de la forma $a^{f(x)} = b^{g(x)}$

Para resolver este tipo de ecuación debemos transformar las bases de las potencias de modo que podamos utilizar la propiedad (1). Es decir:

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow a^{f(x)} = a^{p \cdot g(x)} \Leftrightarrow f(x) = p \cdot g(x)$$

En consecuencia resolver la ecuación $a^{f(x)} = b^{g(x)}$, se reduce a resolver una ecuación de la forma $f(x) = p \cdot g(x)$.

Ejemplo 3.

Resuelva las ecuaciones:

$$a)\ 3^{\frac{x+1}{2}} = 9^{\sqrt{x}}\ ;\ \ b)\ 5^{\frac{x^2-1}{2}} = 25^{x-100}$$

Solución. a) Debemos expresar la ecuación de modo que las potencias tengan la misma base. En efecto:

$$3^{\frac{x+1}{2}} = 9^{\sqrt{x}} \Leftrightarrow 3^{\frac{x+1}{2}} = 3^{2\sqrt{x}} \Leftrightarrow \frac{x+1}{2} = 2\sqrt{x}$$

Por lo tanto, hay que resolver la ecuación: $x + 1 = 4\sqrt{x}$. Elevando ambos miembros al cuadrado resulta

$$(x+1)^2 = (4\sqrt{x})^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 16x \Leftrightarrow x^2 - 14x + 1 = 0$$

cuyas soluciones son $x_1 = 7 - 3\sqrt{5}$ y $x_2 = 7 + 3\sqrt{5}$

Observe que ambos números son mayores que cero; condición que debe imponerse a la cantidad subradical, del radical del segundo miembro de la ecuación.

b) Al expresar el segundo miembro de la ecuación en una potencia de base 2, se tiene:

$$5^{\frac{x^2-1}{2}} = 25^{x-100} \Leftrightarrow 5^{2(x-100)} \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{2} = 2(x-100)$$

Esto es, debemos resolver la ecuación: $\frac{x^2-1}{2} = 2x - 200$. Se tiene entonces

$$\frac{x^2-1}{2} = 2x - 200 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 399 = 0$$

Observe que el discriminante de esta ecuación[3] es $b^2 - 4ac = -395 < 0$. Por lo tanto la ecuación $x^2 - 4x + 399 = 0$ no tiene soluciones reales. En consecuencia la ecuación propuesta no tiene solución.

3 Ecuaciones de la forma $f(a^x) = 0$

Las ecuaciones de la forma $f(a^x) = 0$ se resuelven considerando como incógnita la expresión a^x, con lo cual se llega a una ecuación de la forma $a^x = b$.

Ejemplo 4.

Resuelva las ecuaciones

$$a)\quad 2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 = 0\,; \quad b)\ 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 39$$

[3]Estamos pensando en la ecuación cuadrática general $ax^2 + bx + c = 0$.

Solución. $a)$ Escribimos la ecuación en la forma: $(2^x)^2 - 3(2^x) + 2 = 0$.

Si hacemos el cambio de variable: $2^x = y$ en la ecuación anterior, resulta la ecuación cuadrática: $y^2 - 3y + 2 = 0$; cuyas soluciones son $y_1 = 1$ e $y_2 = 2$.

Reemplazando estos valores de y en la ecuación de cambio de variable $2^x = y$ se tiene que

$$\begin{aligned} i)\ 2^x &= 1 \text{ de lo cual resulta que: } 2^x = 2^0 \Leftrightarrow x = 0 \\ ii)\ 2^x &= 2 \text{ de lo cual resulta que: } 2^x = 2^1 \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Se puede verificar fácilmente que dichos valores son soluciones de la ecuación propuesta.

$b)$ Escribimos la ecuación en la forma $3^x + 3 \cdot 3^x + 3^2 \cdot 3^x = 39$. Factorizando el primer miembro por 3^x, resulta:

$$3^x(1 + 3 + 3^2) = 39 \Leftrightarrow 13 \cdot 3^x = 39 \Leftrightarrow 3^x = 3 \Leftrightarrow 3^x = 3^1$$

En consecuencia la solución es $x = 1$. En efecto

$$3^1 + 3^{1+1} + 3^{1+2} = 3 + 3^2 + 3^3 = 39$$