UNIVERSIDAD DE ANTOFAGASTA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

III PRUEBA DE CÁLCULO III

NOMBRE:____________________________________________NOTA:____________

RUT:________________________________________FECHA:____________________

**I ITEM** Sea:

1. $f(x, y, z) = y$
2. $S: z = g(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ en el 1° octante (mitad superior de la esfera de centro en el origen y radio 1, pero solo en el 1° octante)
3. D = proyección de S en plano XY
   $\mathrm{D} = \{(8x, y) | 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$
   $\mathrm{D} = \left\{ \begin{matrix} (r, \theta) | x = rcos\theta & 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ y = rsen\theta & 0 \leq r \leq 1 \end{matrix} \right\}$
   Es decir D es la región encerrada por la circunferencia de centro (0,0) y radio 1, pero solo en el 1° octante.

Hallar

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, z) \cdot \sqrt{1 + (g_x)^2 + (g_y)^2} dA$$

Nota: No olvidar que se ocupa coordenadas polares en D entonces $dA = rdrd\theta$.

**II ITEM** Aplicando el Teorema de Green, evalúe la integral de línea:

$$\int_C x^4 dx + xydy$$

Donde $\vec{F} = [M, N] = [x^4, xy]$

$C: C_1 + C_2 + C_3$

Siendo: $C_1: recta\ de\ (0,0) a\ (1,0)$

$C_2: recta\ de\ (1,0) a\ (0,1)$

$C_3: recta\ de\ (0,1) a\ (0,0)$

**III ITEM** Demuestre que el área A acotada por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ es\ \pi ab$, ocupando Teorema de Green. Es decir, calcule:

$$\frac{1}{2} \int_C xdy - ydx$$

$$C: \vec{r}(t) = [x, y] = [acost, bsent] \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

**IV ITEM** Hallar

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{N}\, dS = \iint_D F \cdot [-g_x, -g_y, 1]\, dA$$

Siendo:

1) $\vec{F} = [M, N, P] = [18z, -12{,}3y]$
2) S región del plano 2x+3y+6z=12 situada en el 1° octante
   Es decir
   $$S: z = g(x, y) = 2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y$$
3) D = proyección de S en plano XY
   $$\mathrm{D} = \left\{ (x,y) \middle| \begin{array}{c} 0 \le y \le 4 - \frac{2}{3}x \\ 0 \le x \le 6 \end{array} \right\}$$

**V ITEM** Aplicar el Teorema de la Divergencia para calcular la integral de superficie:

$$\int_S \overrightarrow{F} \cdot \hat{N}\, dS = \iiint_Q div\ F\ dV$$

Siendo:

1) $\vec{F} = [M, N, P] = [1{,}1, z(x^2 + y^2)^2]$
2) S superficie que limita al sólido Q
3) Q sólido limitado por las tres superficies siguientes;
   a. $x^2 + y^2 = 1$ cilindro
   b. z=0 plano
   c. z=1 plano

Sugerencia:

$$\mathrm{Q} = \{(x, y, z) \ |0 \le x\text{^}2 + y\text{^}2 \le 1, 0 \le z \le 1\}\ ; dv = dzdydx$$

O bien

$$\mathrm{Q} = \left\{ (r, \theta, z) \middle| \begin{array}{ll} x = rcos\theta & 0 \le \theta \le 2\pi \\ y = rsen\theta & 0 \le r \le 1 \\ z = z & 0 \le z \le 2a \end{array} \right\} ; dv = rdzdrd\theta$$

**VI ITEM** Verifique el teorema de STOKES:

$$\iint_S rot\vec{F} \cdot \hat{N}\, ds = \int_S F\, \overrightarrow{dr} \qquad \text{es decir:}$$

$$\iint rot\vec{F}\, [-g_x, -g_y, 1]\, dA = \int M\, dx + N\, dy + P\, dz$$

UNIVERSIDAD DE ANTOFAGASTA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

D = Proyección de S en plano xy C = Frontera de S

Siendo:

1) $\vec{F} = [M, N, P] = [2x - y, -yz^2, -zy^2]$
2) $S: z = g(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ (Mitad superior de la esfera de centro en el origen y radio 1, es decir: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$)
3) D = proyección de S en plano xy = región encerrada por la circunferencia de centro (0,0) y radio 1
4) D = $\left\{(r, a) \left| \begin{array}{ll} x = r\cos\theta & 0 \le \theta \le 2\pi \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta & 0 \le r \le 1 \end{array} \right.\right\}$
5) C = Frontera de S = trozo de S en plano xy
   C = Circunferencia de centro (0,0) y radio 1
   C = $\vec{r}(t) = [x, y] = [\cos(t), sen(t), 0]$ $0 \le t \le 2\pi$

Nota: No olvidar que se ocupa coordenadas polares en D entonces $dA = rdrd\theta$.