Desarrollo de Segunda Prueba de Cálculo Vectorial, primer semestre 2019

Mercedes Fernández y Eliseo Martínez

27 de mayo del 2019

1. Primer y segundo estándar: Campos vectoriales conservativos, potencial escalar y rotor

Suponga dos párticulas ubicadas en el espacio. La primera partícula tiene carga eléctrica de q_1 *coulomb*, y la segunda q_2 *coulomb*. Suponga además que el vector distancia entre la segunda partícula respecto de la primera está dada por la función vectorial

$$\overrightarrow{r} = x\ \widehat{i} + y\ \widehat{j} + z\ \widehat{k}$$

Se sabe, mediante la Ley de Coulomb, que la fuerza electrostática generada por estas dos cargas es:

$$\overrightarrow{F} = \frac{k\ q_1\ q_2\ \overrightarrow{r}}{\|\overrightarrow{r}\|^3} = \frac{\rho\ \overrightarrow{r}}{\|\overrightarrow{r}\|^3}$$

donde k es la constante electrostática y hacemos $\rho = k\ q_1\ q_2$
Realice lo siguiente:

1. Exprese la fuerza electrostática en función de las variables x, y, y z, esto es encuentre una expresión para $\overrightarrow{F}(x, y, z)$

2. Pruebe que $\overrightarrow{F}$ es un campo conservativo (recuerde que un campo es conservativo si su rotor es el vector nulo)

3. Pruebe que el potencial escalar del campo $\overrightarrow{F}$ es la función

$$\varphi = -\frac{\rho}{\|\overrightarrow{r}\|}$$

1.1. Respuestas

En primer lugar el estudiante debe saber que todo campo vectorial de la forma

$$\frac{\overrightarrow{r}(t)}{\|\overrightarrow{r}(t)\|^q} \tag{1}$$

con $\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ y q cualquier número real (incluso si $q = 0$) es un campo vectorial *conservativo*. De hecho la Ley de Gravitación Universal y la Ley de Coulomb se basa en este tipo de campos. Para verificar que (1) es un campo conservativo basta probar que

$$rot\Big(\frac{\overrightarrow{r}(t)}{\|\overrightarrow{r}(t)\|^q}\Big) = 0$$

Notemos que

$$\frac{\overrightarrow{r}(t)}{\|\overrightarrow{r}(t)\|^q} = \Big(\frac{x}{\|\overrightarrow{r}(t)\|^q}, \frac{y}{\|\overrightarrow{r}(t)\|^q}, \frac{z}{\|\overrightarrow{r}(t)\|^q}\Big)$$

Observemos la simetría que ocurrirá en el cálculo del rotor

$$rot\Big(\frac{\overrightarrow{r}(t)}{\|\overrightarrow{r}(t)\|^q}\Big) = det\begin{pmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{\|\overrightarrow{r}(t)\|^q} & \frac{y}{\|\overrightarrow{r}(t)\|^q} & \frac{z}{\|\overrightarrow{r}(t)\|^q} \end{pmatrix}$$

El cálculo de cada uno de las tres componentes será una diferencia cruzada, por ejemplo para la componente $\overrightarrow{i}$ es

$$-\frac{\partial}{\partial y}\frac{z}{\|\overrightarrow{r}(t)\|^q} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{y}{\|\overrightarrow{r}(t)\|^q}$$

Y este resultado es cero, toda vez que

$$\frac{\partial}{\partial y}\|\overrightarrow{r}(t)\| = \frac{y}{\|\overrightarrow{r}(t)\|}; \frac{\partial}{\partial z}\|\overrightarrow{r}(t)\| = \frac{z}{\|\overrightarrow{r}(t)\|}$$

Y de manera análoga las otras componentes se anulan, y en consecuencia

$$rot\Big(\frac{\overrightarrow{r}(t)}{\|\overrightarrow{r}(t)\|^q}\Big) = (0, 0, 0)$$

Con este resultado, entonces el campo vectorial

$$\rho\frac{\overrightarrow{r}(t)}{\|\overrightarrow{r}(t)\|^3}$$

con ρ número real constante será un campo *conservativo*. En efecto, en el cálculo del determinante la tercera fila está multiplicada por ρ y ella se puede sacar como factor común, y se verifica que cualquier múltiplo de $\frac{\overrightarrow{r}(t)}{\|\overrightarrow{r}(t)\|^3}$ es conservativo.

El campo $\overrightarrow{F}(x, y, x) = \rho\frac{\overrightarrow{r}(t)}{\|\overrightarrow{r}(t)\|^3}$ como función de x, y, y z está dado por

$$\overrightarrow{F}(x, y, x) = \frac{\rho}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}(x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k})$$

Ahora este campo vectorial, por ser conservativo, tiene un potencial escalar, y se propone que el potencial es la función

$$-\frac{\rho}{\|\overrightarrow{r}(t)\|}$$

Puesto que

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\rho}{\|\overrightarrow{r}(t)\|}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\rho}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=-\frac{\rho\ x}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}$$

y de manera análoga

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\rho}{\|\overrightarrow{r}(t)\|}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\rho}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=-\frac{\rho\ y}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}$$

y

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\rho}{\|\overrightarrow{r}(t)\|}=\frac{\partial}{\partial z}\frac{\rho}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=-\frac{\rho\ z}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}$$

Y en consecuencia

$$\nabla-\frac{\rho}{\|\overrightarrow{r}\|}=\overrightarrow{F}(r(t)$$

2. Tercer y cuarto estándar: integral de línea y propiedad de un campo de fuerza conservativo

Suponga que la carga q_1 está ubicada en el lugar $A=(1,1,1)$ del espacio, y la carga q_2 está ubicada en el lugar $B=(2,2,2)$, y considere el segmento de recta, C, que une estos dos puntos de A a B, es decir $x(t)=t, y(t)=t, z(t)=t$, de modo que el vector posición para este segmento es $\overrightarrow{r}(t)=(t,t,t)$, con $\overrightarrow{r}(1)=A$ y $\overrightarrow{r}(2)=B$.
(a) Calcule:

$$\int_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}$$

donde

$$\overrightarrow{F}=\frac{\rho\ \overrightarrow{r}}{\|\overrightarrow{r}\|^3}$$

Nota: Recuerde que

$$\int_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}=\int_{t=1}^{t=2}\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t))\cdot\overrightarrow{r}\,'(t)\ dt$$

(b) Si admitimos que la función escalar anterior

$$\varphi=-\frac{\rho}{\|\overrightarrow{r}\|}$$

es el potencial de la fuerza electrostática, compare el valor de la integral anterior con el valor de

$$\varphi(B) - \varphi(A)$$

Justifique porque los valores obtenidos en (a) y (b) son iguales.

(c) Si ahora consideramos la curva, C_1, $\overrightarrow{r}(t) = (sen(t)+1, sen(t)+1, sen(t)+1)$ que va desde el punto $A = (1,1,1)$ al punto $B = (2,2,2)$, entregue el valor de

$$\int_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$$

sin realizar ningún cálculo solo justificando y asegurandose que esta curva pasa por los puntos A y B.

2.1. Respuestas

La curva que une el punto $A = (1,1,1)$ con $B = (2,2,2)$ se puede modelar mediante $\overrightarrow{r}(t) = (t,t,t)$ con $1 \leq t \leq 2$, de modo que tenemos el campo

$$\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) = \frac{\rho}{(\sqrt{3t^2})^3}(t,t,t)$$

y además $\overrightarrow{r}'(t) = (1,1,1)$ de modo que

$$\int_c \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_1^2 \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) \cdot \overrightarrow{r}'(t)\ dt = \int_1^2 \frac{3t}{(\sqrt{3t^2})^3} dt = \frac{\sqrt{3}}{6}\rho$$

Ahora si evaluamos el potencial escalar

$$-\frac{\rho}{\|\overrightarrow{r}\|} = -\frac{\rho}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

en los puntos $A = (1,1,1)$ y $B = (2,2,2)$ se tiene que

$$\varphi(B) - \varphi(A) = \frac{\sqrt{3}}{6}\rho$$

Finalmente si la curva C_1 está dada por $\overrightarrow{r}(t) = (sen(t)+1, sen(t)+1, sen(t)+1)$ podemos observar que esta curva pasa por los puntos $A = (1,1,1)$ y $B = (2,2,2)$, puesto que $\overrightarrow{r}(0) = A$ y $\overrightarrow{r}(\frac{\pi}{2}) = B$. Y esto unido al hecho de que $\overrightarrow{F}$ es un campo conservativo (la integral es independiente de la trayectoria) se tiene que

$$\int_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \frac{\sqrt{3}}{6}\rho$$