¿Por qué enseñamos a integrar $\int f(x)\,dx$?

Eliseo Martínez

1. La integral como solución de una ecuación diferencial

En la matemática aplicada a la Ingeniería, a los procesos de la física, con cierta frecuencia nos encontramos con una ecuación diferencial. ¿Qué es una ecuación diferencial? Es una ecuación donde la ”incognita” es una función (y no una variable). Veamos un sencillo ejemplo, ¿cuál es la función $f(x)$ tal que

$$\frac{df(x)}{dx} = -a \cdot f(x)? \tag{1}$$

para una constante $a > 0$. La solución de esta ecuación requiere del conocimiento de las derivadas. Lo que se está preguntando es ¿cuál es la o las funciones tal que su derivada sea (”casi” la misma función) el producto entre $-a$ y la función buscada?

La solución a la ecuación (1) es sencilla si recordamos algo de derivada. En efecto, la unica función real tal que su derivada sea ella misma es la función e^x. De modo que con un poco de algebra sobre derivadas, proponemos como solución a

$$f(x) = e^{-a\,x}$$

En efecto, si derivamos esta función tenemos que

$$\frac{d(e^{-a\,x})}{dx} = -a\,e^{-a\,x}$$

que admite la misma forma de la ecuación (1). Un poco más de acusiosidad nos lleva que esta es una solución particular, y que la colección de funciones del tipo

$$g(x) = k\,e^{-a\,x} \tag{2}$$

con k cualquier número real positivo. la función dada en (2) satisface la ecuación en (1).

2. La integral como ”antiderivada” o primitiva

Supongamos que tenemos la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{df(x)}{dx} = 2 \tag{3}$$

Que significa preguntarse ¿qué función de tal que su derivada sea igual a 2? La respuesta casi inmediata será...

$$f(x) = 2x + k$$

con k cualquier número real. En efecto si derivamos $2x + k$ obtenemos el valor de 2. La búsqueda de la solución en la ecuación (3) se denota por

$$\int 2\,dx$$

De otra forma, queremos encontrar la función que dio origen a la derivada, esto es ”buscar la primitiva”. Para fijar ideas, veamos otro ejemplo. ¿Cuál es la la primitiva de x^2? O de otra forma, ¿cuál es la función cuya derivada es x^2? O la más general y frecuente, ¿cuál es la integral de x^2?. Lo que se busca entonces es resolver

$$\int x^2\,dx$$

3. ¿Qué significa el término dx en la expresión $\int f(x)\,dx$?

De momento, dx significa encontrar la solución $f(x)$ en términos de la letra x. Es decir el cálculo de $\int x^2\,dx$ es exactamente el mismo que $\int t^2\,dt$. De otra forma es el mismo esfuerzo energético en calcular $\int u^2\,du$.

4. Una propiedad obvia.

$$\int \left[\frac{d\,f(x)}{dx}\right] dx = f(x)$$

Y esta propiedad es la llave mágica para resolver las ecuaciones diferenciales. En efecto, si tenemos la ecuación diferencial

$$\frac{df(x)}{dx} = 2$$

entonces

$$f(x) = \int 2\,dx$$

Veamos la aplicación de la primera sección, dada en (1)

$$\frac{df(x)}{dx} = -a \cdot f(x)$$

por comodidad de notación la podemos reescribir como

$$f'(x) = -a \cdot f(x)$$

Ahora suponiendo que $f(x) \neq 0$, entonces nos queda la ecuación

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -a$$

Integrando, obtenemos

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int -a\,dx = -ax + k$$

Y es aquí, entonces que el estudiante debe aprender técnicas para resolver la integral

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

para una función $f(x)$ desconocida.

5. Cálculo de $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$

Debemos o deberíamos recordar que

$$\frac{d}{dx}\left(\ln\ f(x)\right) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

de modo que aplicando la propiedad obvia integramos esta igualdad y obtenemos

$$\int \frac{d}{dx}\left(\ln\ f(x)\right)dx = \ln f(x) = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = -ax + k$$

Obtenemos entonces

$$\ln f(x) = -ax + k$$

Aplicando la función expencial, obtenemos

$$f(x) = e^{-ax+k} = e^{k}e^{-ax}$$

y puesto que e^k es una constante positiva, entonces tenemos que la solución de la ecuación diferencial dada en (1) es $C \cdot e^{-ax}$. Si derivamos esta función podemos comprobar que se satisface la ecuación diferencial en (1).

6. ¿Existe en la naturaleza la ecuación $\frac{df(x)}{dx} = -a \cdot f(x)$?

Muchos fenómenos se rigen por esta ecuación. De otra forma es un modelo matemático (esta ecuación diferencial recibe el nombre genérico de modelo), y al resolverlo podemos predecir lo que acontecerá en el futuro. Este modelo se llama ecuación diferencial de primer orden. Veamos donde se aplica.

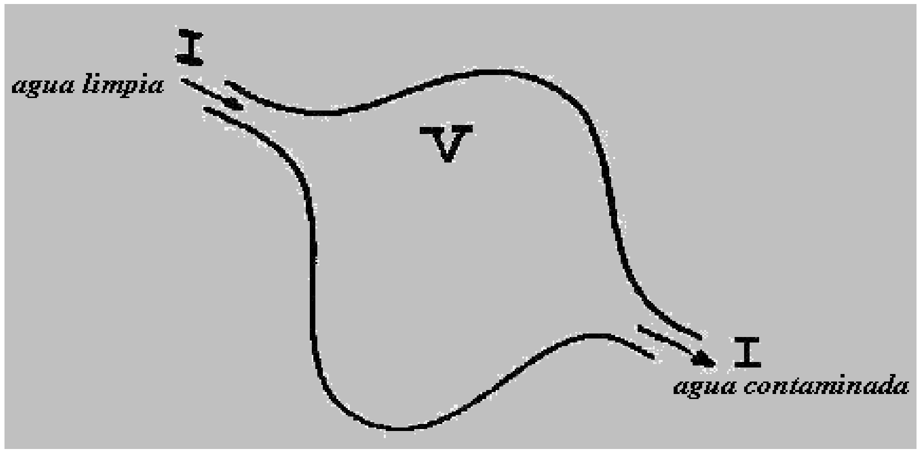

Figura 1

La Figura 1 bosqueja un lago de volumen constante, V m^3, y en consecuencia tanto el flujo de entrada como el de salida es el mismo, digamos $I\ m^3/seg$. Supongamos que el lago ya se encuentra contaminado. Si el volumen de contaminante en el tiempo t es$P(t)$. Y definimos la concentración de contaminante a través del tiempo por

$$y(t) = \frac{P(t)}{V}$$

¿Cuál es la evolución dinámica de $y(t)$? Si $P(t)$ es el volumen de contaminante en el tiempo t, necesitamos saber el volumen de contaminante en el tiempo $t + \Delta t$,

$$P(t + \Delta t) = P(t) - I \cdot y(t) \cdot \Delta t \tag{4}$$

En efecto, si suponemos que el contaminante está repartido uniformemente en todo el lago, entonces este contaminante saldrá por el flujo de salida, y la cantidad de contaminante que saldrá durante el intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$ será una fracción (una parte) del flujo, y esta parte es precisamente la concentración $y(t)$, y es evidente que el contaminante que saldrá (el volumen) será directamente proporcional al tiempo transcurrido, esto es $y(t) \cdot I \cdot \Delta t$. Y esta es la cantidad o volumen de contaminante se le debe restar al volumen que ya había hasta el tiempo t. Esta es la explicación del modelo construido en (4). Ahora buscando el cociente de Newton, nos queda

$$\frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} = -I \cdot y(t)$$

pasando al límite cuando Δt tiende a cero, nos queda

$$P'(t) = -I \cdot y(t)$$

Y puesto que $P'(t) = y'(t) \cdot V$, reemplazamos obteniendo

$$y'(t) = -\frac{I}{V} \cdot y(t)$$

Que no es otra ecuación que la dada en (1). Y conforme a lo establecido la solución general es

$$y(t) = C \cdot e^{-\frac{I}{V}t}$$

La constante C es muy fácil de calcular. En el instante $t = 0$, la concentración de contaminación es $y(0) = C$, siendo este valor la concentración de contaminación inicial. De manera que la solución al modelo de la contaminación es

$$y(t) = y(0) \cdot e^{-\frac{I}{V}t}$$