Integrales impropias

Eliseo Martínez Herrera

31 de marzo del 2014

Abstract

Se estudian las integrales impropias sobre la base del cálculo de integrales definidas y el límite de funciones

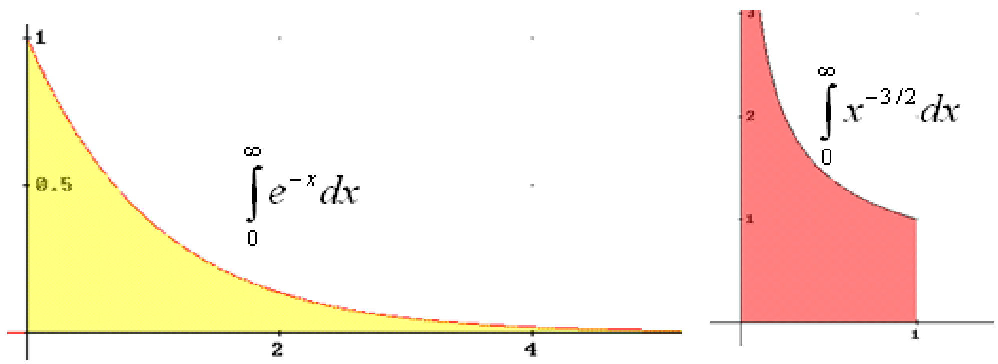
1 Integrales impropias

Una integral $\int_a^b f(x)\,dx$ se dice *impropia* cuando su límite de integración es infinito o cuando el integrando $f(x)$ es singular[1] en el rango $a \leq x \leq b$. Las integrales

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx \quad \text{y} \quad \int_0^1 x^{-3/2}dx$$

son ejemplos de este apelativo de *impropias* en las dos situaciones descritas, y como lo muestra la Figura 1, estas integrales impropias representan áreas no acotadas.

[1] Se entenderá que un punto es singular cuando no está definido en la función. Por ejemplo $x = 0$ es un punto singular para la función $1/x$



Gráfica1

No es obvio que, aún siendo áreas no acotadas, el valor numérico del área sea finita o no. Y esta dificultad se resuelve simplemente calculando el área bajo la curva de la manera tradicional pero con la aplicación de límites, esto es, considerando la integral impropia como el límite de una integral propia. Veamos el cálculo de los dos ejemplos expuestos,

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx \;;\; \lim_{a\to 0}\int_a^1 x^{-3/2}dx$$

Si el límite existe se dice que la integral impropia es *convergente*, si por el contrario el límite no existe, se dice que la integral impropia es *divergente*.

El valor de las dos integrales citadas anteriormente se determinan fácilmente, en efecto

$$\int_0^b e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^b = 1 - e^{-b}$$

y en consecuencia

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx \;=\lim_{b\to\infty} 1 - e^{-b} = 1$$

La otra integral

$$\int_a^1 x^{-3/2}dx = \left[-\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_a^1 = \left(-2 + \frac{2}{\sqrt{a}}\right)$$

de modo que

$$\lim_{a \to 0} \int_a^1 x^{-3/2} dx = \lim_{a \to 0} \left(-2 + \frac{2}{\sqrt{a}} \right) = \infty$$

En el primer caso el área es acotada y en consecuencia la integral es convergente; en el segundo caso el área no es acotada y en consecuencia la integral es divergente.

1.1 Evaluar $\int_0^1 x^{-\alpha} dx \ ; \ \alpha > 0$

Sea

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 x^{-\alpha} dx$$

y puesto que

$$\int_\varepsilon^1 x^{-\alpha} dx = \begin{cases} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_\varepsilon^1 = \frac{1-\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}; & \alpha \neq 1 \\ [\ln(x)]_\varepsilon^1 = -\ln(\varepsilon); & \alpha = 1 \end{cases}$$

y puesto que si hacemos $\varepsilon \to 0$ entonces el límite solo será finito para el caso en que $\alpha < 1$. Y en este caso

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1 - \varepsilon^{1-\alpha}}{1 - \alpha} = \frac{1}{1 - \alpha}$$

Un punto singular x_* de una función $f(x)$ se dice *integrable* si la integral impropia $\int_a^b f(x)\, dx$ es convergente. La conclusión obtenida de este último ejemplo es que $x = 0$ es integrable cuando $0 < \alpha < 1$

1.2 Evaluar $\int_2^\infty \frac{dx}{x \ln x}$

Sea

$$I = \lim_{s \to 0} \int_2^s \frac{dx}{x \ln x}$$

La Gráfica 2 muestra el área representada por la integral. La integración se puede hacer mediante un cambio de variable adecuado. Sea $u = \ln x$, donde la

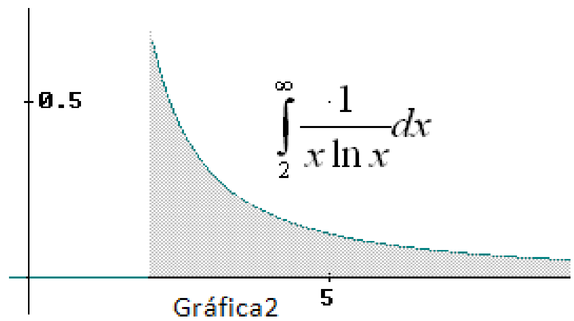


Figure 1:

función $\ln x$ es una función creciente en el intervalo $x > 2$, y en consecuencia existe la derivada no nula en dicho intervalo, esto es $du/dx = 1/x$, de modo que $dx = x\,du$; y además si $x = 2$ entonces $u = \ln 2$ y si $x = s$ se tiene que $u = \ln s$. Y queda la integral como

$$\int_2^s \frac{dx}{x\ \ln x} = \int_{\ln 2}^{\ln s} \frac{x\ du}{x\,u} = \int_{\ln 2}^{\ln s} \frac{du}{u} = [\ln u]_{\ln\ 2}^{\ln\ s} = \ln\left[\frac{\ln\ s}{\ln\ 2}\right]$$

de modo que

$$I = \lim_{s \to 0} \int_2^s \frac{dx}{x\ \ln x} = I = \lim_{s \to 0}\ \ln\left[\frac{\ln\ s}{\ln\ 2}\right] = \infty$$

Y la integral es divergente. Esto es, el área bajo la curva para $x > 2$ es infinita.

1.3 Evaluar $\int_1^2 \frac{dx}{x\ \ln x}$

En este caso, y aprovechando el cálculo de la primitiva anterior, tenemos que

$$\int_a^2 \frac{dx}{x\ \ln x} = \ln\left[\ln 2 - \ln a\right]$$

de modo que

$$\lim_{a \to 1} \int_a^2 \frac{dx}{x\ \ln x} = \lim_{a \to 1}\ \ln\left[\ln 2 - \ln a\right] = \infty$$

Y la integral es divergente.

2 Criterios de convergencia

Deberíamos saber cuando una integral impropia es convergente o no, sin necesidad de realizar el cálculo de la integral (que a veces no será posible en términos de una función analítica), o de otra forma la integral no está en forma explícita en términos de una función conocida (en matemática esto ocurre con mucha frecuencia). Un método de estudiar la convergencia de una integral es compararla con otra integral impropia que sea más sencilla su cálculo o que simplemente ya sepamos su resultado. Supongamos que tenemos $f(x) \geq 0$ y queremos estudiar la convergencia de $\int_a^\infty f(x)\,dx$. Y supongamos que sabemos que la integral $\int_a^\infty g(x)\,dx$ es convergente, entonces si

$$f(x) \leq g(x) \qquad \text{para } a \leq x \leq \infty$$

se tiene obviamente que

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \leq \int_a^\infty g(x)\,dx < \infty$$

Inversamente, si tenemos que $f(x) \geq r(x) \geq 0$ y $\int_a^\infty r(x)\,dx$ es una integral divergente, entonces $\int_a^\infty f(x)\,dx$ también será divergente puesto que

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \geq \int_a^\infty r(x)\,dx$$

2.1 La integral (fundamental) $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ es convergente

Escribamos

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx + \int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$$

donde la integral entre 0 y 1 es una integral propia y tiene un valos finito cosntante, digamos M. Ahora bien, puesto que[2]

$$e^{-x^2} < e^{-x} \text{ para } x > 1$$

se sigue que[3]

$$\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx \leq \int_1^\infty e^{-x}\,dx = \frac{1}{e}$$

Además

$$\left|\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\right| \leq \left|\int_0^1 e^{-x^2}\,dx\right| + \left|\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx\right| \leq M + \frac{1}{e} < \infty$$

Y por lo tanto la integral $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ es convergente.

Daremos una cota para esta integral. Puesto que $e^{-x^2} < 1$, entonces

$$M = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx < \int_0^1 1\,dx = 1$$

Y por lo tanto[4]

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx < 1 + \frac{1}{e} \simeq 1.36$$

---

[2]En efecto para $x > 1$, se tiene que $x^2 > x$, y en consecuencia $-x^2 < -x$, y por lo tanto

$$e^{-x^2} < e^{-x}$$

[3]Recuerde que

$$\int_1^\infty e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_1^\infty$$

[4]Se lo diremos de una vez por todas

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \approx 0.886$$

2.2 El uso de las desigualdades para análisis de la convergencia

Queremos estudiar la convergencia de

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x+x^3)^{1/2}}$$

Esta integral es "doblemente" impropia. En primer lugar $x=0$ es un punto singular; y en segundo, lugar el rango de integración es infinito. Por estas razones ataquemos la singularidad y el rango infinito haciendo la siguiente descomposición

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x+x^3)^{1/2}} = \int_0^1 \frac{dx}{(x+x^3)^{1/2}} + \int_1^\infty \frac{dx}{(x+x^3)^{1/2}}$$

y hagamos u análisis para cada integral del miembro derecho. Para la primera integral[5]

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+x^3)^{1/2}} = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}(1+x^2)^{1/2}} \leq \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$$

La segunda integral la tratamos en forma similar,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{(x+x^3)^{1/2}} < \int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}} = 2$$

En efecto, puesto que

$$(x+x^3)^{1/2} > x^{3/2} \quad \text{para } x > 1$$ [6]

Entonces

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x+x^3)^{1/2}} < 2+2 = 4$$

Y en consecuencia la integral es convergente.

[5] En efecto, utilizamos el hecho siguiente

$$(1+x^2)^{1/2} > 1 \quad \forall x$$

[6] ¿No lo ve? Mire:

$$\sqrt{x^3+x} > \sqrt{x^3} \quad si \;\; x > 1$$