La longitud de una curva plana

Eliseo Martínez Herrera

07 de abril del 2014

Abstract

Se calcula la longitud de una curva suave en el plano definida por la función $y = f(x)$ entre dos valores $x = a$ y $x = b$..

1 Longitud de una curva

La longitud de arco de una curva plana $y = f(x)$ se puede calcular como el límite de una sucesión de aproximaciones poligonales (vea la Figura 1). Como se ilustra, la longitud de una pequeña sección de la curva se puede aproximar en virtud del teorema de Pitágoras

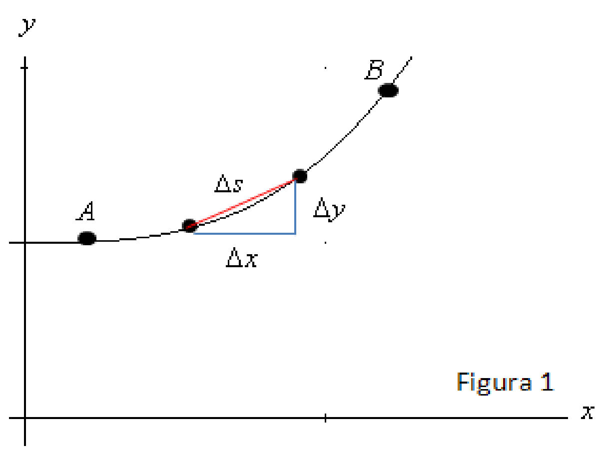

Figura 1

por la fórmula

$$\Delta s \approx \left[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2\right]^{1/2}$$

que en el límite[1] obtenemos la expresión diferencial

$$\begin{aligned} ds &= \left(dx^2 + dy^2\right)^{1/2} \\ ds^2 &= dx^2 + dy^2 \end{aligned}$$

y que a menudo es más conveniente escribir como

$$ds = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{1/2}$$

o también de la forma

$$ds = \left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{1/2}$$

Además también se concluye que

$$1 = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2$$

Antes de proseguir debemos hacer una declaración: el elemento infinitesimal ds es la longitud infinitesimal de la curva, y estamos suponiendo que la longitud de la curva desde el punto A hasta el punto B en la Gráfica 1 es s. De modo que sumando todas estas longitudes infinitesimales ds, desde A hasta B, suponiendo que el punto A se obtiene cuando $x = a$, y el punto B se obtiene en $x = b$, entonces

$$s = \int_{x=a}^{x=b} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{1/2} dx \tag{1}$$

Si la función $y = f(x)$ que describe la curva tiene inversa, entonces la ecuación en (1) se puede escribir como

$$s = \int_{f(a)}^{f(b)} \left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{1/2} dy \tag{2}$$

y se utiliza la fórmula que sea más sencilla de evaluar su integral.

[1] Esto es para una longitud de Δx muchísimo más pequeña (y en consecuencia Δy también se hace pequeñísimo), y por ende Δs se hace pequeño

1.1 Ejemplo

Calcular la longitud del arco de la parábola $y = x^2$ desde el origen hasta el punto $(1/2,\ 1/4)$.

Puesto que $dy/dx = 2x$, la longitud del arco de parábola, usando la expresión (1), se calcula por[2]

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{1/2} \left[1 + (2x)^2\right]^{1/2} dx \\ &= \int_0^{1/2} \left[1 + 4x^2\right]^{1/2} dx \\ &= \frac{1}{4}\left[\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right] \end{aligned}$$

[2] Usted realice los cálculos