Cambio de variable

Eliseo Martínez Herrera

07 de abril del 2014

Abstract

Se estudian las condiciones precisas para utilizar el proceso de cambio de variable en el cálculo de las integrales definidas.

1 La función a integrar

Supongamos que queremos integrar

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

y esta integral resulta extremadamente complicada y puede resultar que si se efectúa un cambio de variable del tipo

$$x = g(u)$$

la integral resulta más sencilla. ¿Qué condiciones debe cumplir la función $g(u)$?

En primer lugar esta función debe tener inversa, observe la Figura 1. Y esto significa que necesariamente la función debe ser o *estrictamente decreciente* o *estrictamente decreciente*, entonces

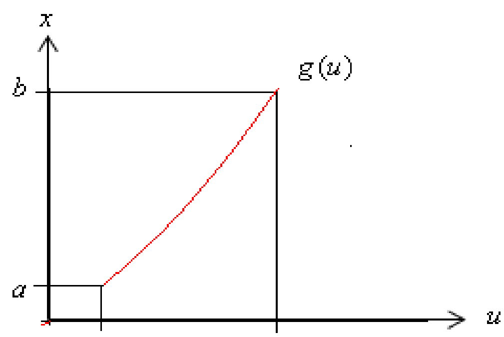

Figura 1

$$\frac{dg(u)}{du} \neq 0$$

de modo que

$$\frac{dx}{du} = g'(u) \Rightarrow dx = g'(u)\, du$$

Supongamos ahora que esta función es creciente entonces, para encontrar los nuevos límites de integración respecto de esta nueva variable, generamos las dos siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} a &= g(u_1) \\ b &= g(u_2) \end{aligned}$$

de modo que

$$u_1 = g^{-1}(a) \ ; \ u_2 = g^{-1}(b)$$

y así obtenemos

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(u)) \ g'(u)\, du$$

Donde se supone que la integral de la derecha es muy sencilla.

2 Un ejemplo

Queremos encontrar el área de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ indicada en la Figura 2.

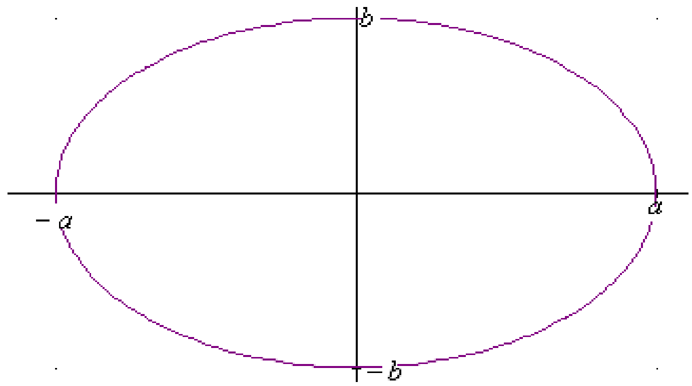

Figura 2

Es claro que la función que describe el contorno de esta elipse entre los valores 0 y a es

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \;\; ; \;\; 0 \leq x \leq a$$

De modo que el área pedida es cuatro veces la siguiente área

$$\int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\, dx$$

La expresión

$$\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

nos puede traer a la memoria el teorema de Pitágoras o las funciones trigonométricas. Pensemos en el siguiente cambio de variable

$$x = a\, sen(\theta)$$

de modo que

$$\frac{dx}{d\theta} = a\, \cos(\theta)$$

además si $x = 0$ entonces $\theta = 0$ y si $x = a$ entonces $\theta = \pi/2$. Observemos que la derivada $\frac{dx}{d\theta} = a\, \cos(\theta)$ es no nula en el interior del intervalo $(0, \pi/2)$. Con estos cambios nuestra integral queda como

$$\int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\, dx \;\; = \;\; \int_0^{\pi/2} b\sqrt{1 - (sen(\theta))^2}\, a\cos(\theta)\, d\theta$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{\pi/2} b\, a\, (\cos(\theta))^2 \ d\theta \\
&= ab \int_0^{\pi/2} (\cos(\theta))^2 \ d\theta = ab \left[\frac{sen(\theta)\ \cos(\theta)}{2} + \frac{\theta}{2} \right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{ab\pi}{4}
\end{aligned}
$$

Una aclaración, la integral $\int (\cos(\theta))^2 \, d\theta$ se puede encontar mediante integración por parte, y por otro lado si tenemos la circunferencia cuando $a = b = r$, obtenemos el clásico resultado que el área encerrada en la circunferencia es πr^2.