Integrales del tipo $\int \frac{dx}{Ax^2+Bx+C}$

Eliseo Martínez Herrera

Clase de ayudantía para el 28/03/2014

Abstract

El cálculo de esta integral se fundamenta en llevar la parábola $Ax^2 + Bx + C$ a su forma estándar, esto es $k(x-a)^2 + b$

1 La parábola en su forma estándar

Consideremos la parábola

$$3x^2 + 2x + 1$$

que está en su forma general. Vamos a estudiar el procedimiento para llevarla a su forma estándar $3(x-a)^2 + b$. En efecto, para calcular los valores de a y b utilizamos la igualdad

$$3x^2 + 2x + 1 = 3(x-a)^2 + b$$

Expandiendo el miembro derecho de esta ecuación tenemos

$$3x^2 + 2x + 1 = 3x^2 - 6ax + 3a^2 + b$$

igualando los coeficientes homogeneos

$$\begin{aligned} 2 &= -6a \quad \text{(para x)} \\ 1 &= 3a^2 + b \quad \text{(término constante)} \end{aligned}$$

resolviendo este sencillo sistema, obtenemos

$$\begin{aligned} a &= -\frac{1}{3} \\ b &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

De modo que la parábola $3x^2 + 2x - 1$ es exactamente la parábola

$$3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}$$

2 La integral de $\int \frac{dx}{3x^2+2x+1}$

Integrar esta expresión es lo mismo que integrar

$$\int \frac{dx}{3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}}$$

para esto vamos a ver si podemos utilizar la integral conocida[1]

$$\int \frac{du}{u^2+1} = \arctan(u)$$

Podemos hacer el siguiente arreglo algebraico

$$3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot \left[\frac{9}{2}\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + 1\right]$$

Nota: insistimos que a la parábola $3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}$ la queremos llevar a una forma similar a $u^2 + 1$. Continuemos

$$3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\left[\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{1}{3}\right)\right)^2 + 1\right]$$

entonces la expresión $\frac{3}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{1}{3}\right)$puede ser reemplazada por u. Hagamos el siguiente cambio de variable

$$u = \frac{3}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{1}{3}\right)$$

entonces

$$\frac{du}{dx} = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{2}}{3}du$$

[1] Recuerde que

$$\frac{d(\arctan(u))}{du} = \frac{1}{u^2+1}$$

Entonces tenemos la igualdad

$$\int \frac{dx}{3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{du}{(u^2+1)} = \frac{1}{3}\arctan(u)$$

Volviendo a las variable originales, tenemos el resultado final

$$\int \frac{dx}{3x^2+2x-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\left(x+\frac{1}{3}\right)\right)$$

o de otra forma

$$\int \frac{dx}{3x^2+2x-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(3x+1)\right)$$