El concepto de integral con aplicaciones sencillas

Eliseo Martínez

Marzo del 2014

Abstract

Este artículo trata de ejemplos sencillos del concepto de integral con aplicaciones a la Física, la Teoría de la Probabilidad y a las Ecuaciones Diferenciales para modelos biológicos de crecimiento.

1 Aplicaciones a la Teoría de la Probabilidad

Toda función real $f(x) \geq 0$ definida en algún dominio $\mathbb{D}$ de $\mathbb{R}$ (los números reales) se dice que es una función de densidad si satisface lo siguiente

$$\int_{\mathbb{D}} f(x)\, dx = 1$$

Desde el punto de vista geométrico significa que él área bajo la curva de la función $f(x)$ vale 1. Veamos algunos ejemplo frecuentes.

1.1 La densidad exponencial

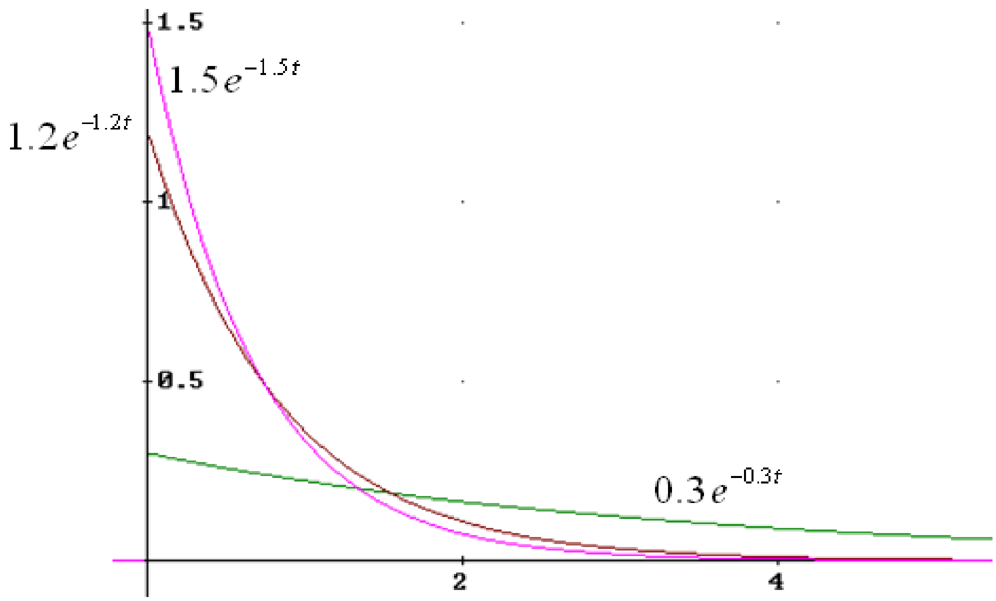
Consideremos la función

$$f(x) = \beta\, e^{-\beta\, t};\ t \geq 0,\ \beta > 0 \tag{1}$$

A esta función se le llama densidad exponencial de parámetro β. Observemos que el dominio de esta función es $[0, \infty)$. Una primitiva para esta función de densidad es $-e^{-\beta t}$ y en consecuencia

$$\int_0^\infty \beta\, e^{-\beta\, t}\, dt = \left[-\, e^{-\beta\, t}\right]_0^\infty = -\, e^{-\beta \cdot \infty} - (-\, e^{-\beta \cdot 0}) = 0 - (-1) = 1$$

La gráfica de esta función para algunos valores del parámetro β se entregan en la Gráfica 1



Gráfica 1

Esta función modela los tiempos de falla de algunos artículos electrónicos, como por ejemplo la duración de una ampolleta. Puesto que el tiempo de vida útil de una ampolleta es aleatorio, por lo general esta función de densidad se ajusta bastante bien. Si designamos el tiempo (aleatorio) de falla de la ampolleta por T, entonces se define la siguiente probabilidad

$$\Pr\{T < t\} = \int_0^t \beta\, e^{-\beta\, z} dz$$

entendiendo con esto que el valor de la integral (que será un valor menor que 1 si $t < \infty$) está denotando la probabilidad de que la ampolleta falle antes del tiempo t.

La pregunta importante para los estadísticos, probabilistas y empresarios de ampolletas es determinar una medida de la incertidumbre de saber el "tiempo medio de vida de una apolleta"[1]. Y este valor se define como[2]

$$tiempo\, medio\, de\ vida\ útil = \int_0^\infty t\ \cdot \beta\, e^{-\beta\, t}\, dt$$

y este integral se puede calcular mediante la técnica de integración por parte. Esto es

$$\int t\ \cdot \beta\, e^{-\beta\, t}\, dt = -t\, \cdot\ e^{-\beta\ t} - \int -1\, \cdot\ e^{-\beta\, t} dt = \frac{1}{\beta} - \frac{e^{-\beta\, t}(\beta t + 1)}{\beta}$$

de modo que evaluando la integral impropia, obtenemos[3]

$$TMVU = \int_0^\infty t\ \cdot \beta\, e^{-\beta\, t}\, dt = \left[\frac{1}{\beta} - \frac{e^{-\beta\, t}(\beta t + 1)}{\beta}\right]_0^\infty = \frac{1}{\beta}$$

De modo que el tiempo medio de falla de un tiempo de falla exponencial es $1/\beta$.[4] Por otro lado, si suponemos que el tiempo de falla de la ampolleta se mide en horas y $\beta = 0.0003$ entonces significa que el tiempo promedio de falla es de 3333 horas aproximadamente[5].

1.2 La función de densidad normal estándar

Es una de las funciones más utilizadas en matemáticas, estadística, probabilidades, física, economía, ciencias sociales. La llamada función de densidad normal estándar

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\ x^2/\,2} \tag{2}$$

Esta función no tiene una "primitiva" analítica (esto es una fórmula de función cuya derivada sea precisamente la función en (2). Sin embargo se puede

[1] Tiempo medio de vida o promedio de tiempo de falla.

[2] Para abreviar *tiempo medio de vida útil* diremos $TMVU$

[3] Efectue en detalle los cálculos.

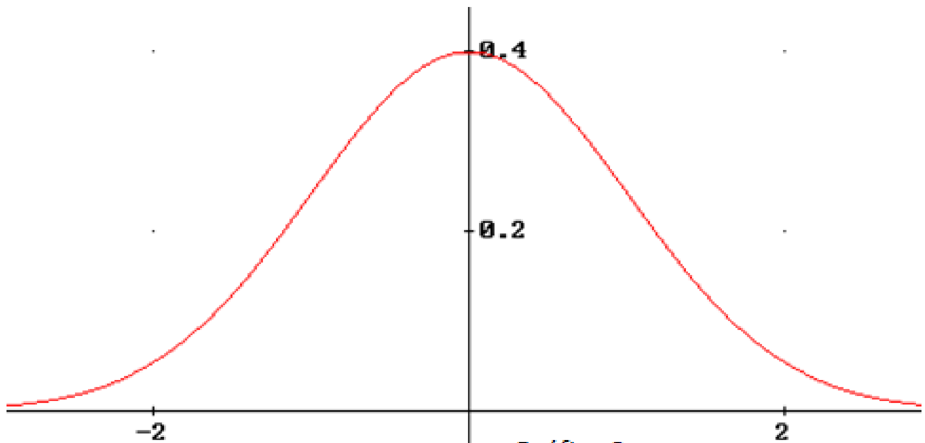
[4] Esto significa además que las unidaes de β son unidades de frecuencia, esto es $1/$*tiempo*.

[5] En estricto rigor $1/0.0003 = 3333.333$

demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = 1$$

Es decir el área bajo la curva de esta función vale 1. La densidad normal es una función claramente simétrica respecto del eje Y, y es una fuunción que alcanza su máximo en $x = 0$, de hecho corta al eje Y en el valor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Observemos la Gráfica 2.



Gráfica 2

1.3 La densidad normal de parámetros μ y σ

En la función (2) hacemos el siguiente cambio de variable

$$y = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

de modo que $dy = dx/\sigma$, ahora si exigimos que $\sigma > 0$ entonces la transformación obtenida por el cambio de variable es una recta de pendiente positiva, y en consecuencia tiene su inversa, implicando con esto que si x tiene dominio en $(-\infty, \infty)$ en forma creciente la variación de y ocurre también en forma creciente y en el mismo dominio $((-\infty, \infty)$. Esto significa que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-(y-\mu)^2/2\sigma} dy = 1$$

A la nueva función en el intengrando de la segunda integral se le llama función de densidad normal de parámetros μ y σ, esto es

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\, e^{-\,(y-\mu)^2\,/\,2\sigma}\ ;\ -\infty < y < \infty; \mu \in \mathbb{R},\, \sigma > 0 \tag{3}$$

1.4 La densidad gamma

La densidad gamma con parámetros r y λ, endonde $r = 1, 2, ...,$ y $\lambda > 0$ se define como

$$f(x) = \frac{\lambda}{(r-1)!}\,(\lambda\, x)^{r\,-\,1} e^{-\lambda\, x}\ ;\ x > 0 \tag{4}$$

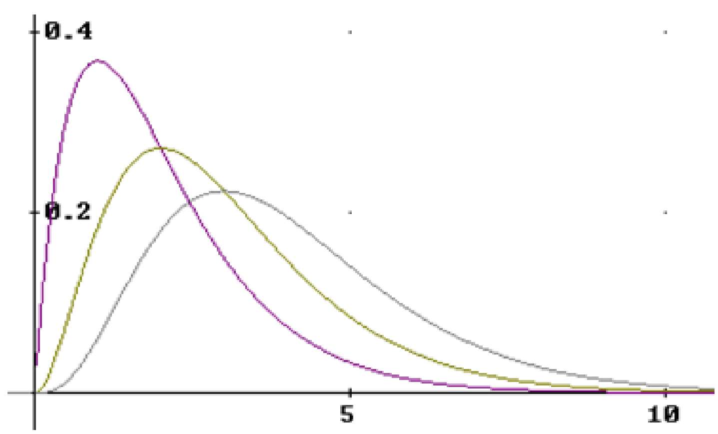
Se puede verificar que

$$\int_0^\infty x^{r-1} e^{-\lambda\, x} = \frac{(r-1)!}{\lambda^r}$$

y en consecuencia

$$\int_0^\infty \frac{\lambda}{(r-1)!}\,(\lambda\, x)^{r\,-\,1} e^{-\lambda\, x} dx = 1 \tag{5}$$

Densidades gamma con parámetro λ=1 y *r* =2, 3 y 4



Gráfica 3

La Gráfica 3 muestra el comportamiento de (4) para $\lambda = 1$, y valores de $r = 1, 2, 3$ (desde arriba hacia abajo, respectivamente). Esta función de densidad está estrechamente ligada con la llamada función gamma (no confundir con la densidad gamma), que es,

$$\Gamma(r) = \int_0^\infty z^{r-1}e^{-z}dz \tag{6}$$

donde esta función tiene la siguiente propiedad

$$\Gamma(r) = (r-1)\Gamma(r-1)$$

y puesto que es fácil verfificar que $\Gamma(1) = 1$, se tiene que

$$\Gamma(r) = (r-1)!$$

Finalmente podemos observar que haciendo el cambio de variable $z = \lambda x$ (y en consecuencia $dz = \lambda\, dx$) se obtiene el resultado dado en (5).

1.5 Cálculo de percentiles en funciones de densidad

El cálculo de percentiles es crucial en la Teoría de la Estadística. Recuerde que habíamos dicho que el área bajo la curva de una función de densidad es 1, respecto del dominio donde está definida, esto es si $f(x)$ es función de densidad entonces[6]

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$

Ahora bien, el problema es calcular un valor de x_0 tal que

$$\int_{-\infty}^{x_0} f(x)\, dx = 1 - \alpha \ ; \ 0 < \alpha < 1$$

[6]Esto es en el caso de que el dominio de definición de $f(x)$ sea precisamente $(-\infty, \infty)$. Si el dominio de la densidad $f(x)$ es (a, b) entonces se tendrá que

$$\int_a^b f(x)\, dx = 1$$

Veamos un ejemplo, consideremos la función exponencial dada en (1), y queremos encontrar el valor de t_0 tal que[7]

$$\int_0^{t_0} \beta\, e^{-\beta\, t}\, dt = 0.95$$

A tal valor de t_0 se le llama *percentil 95* (asociada a la densidad exponencial). Puesto que

$$\int_0^{t_0} \beta\, e^{-\beta\, t}\, dt = 1 - e^{-\beta\, t_0}$$

entonces debemos resolver la ecuación

$$1 - e^{-\beta\, t_0} = 0.95$$

cuyo resultado trivial es

$$t_0 = \frac{-\ln(0.05)}{\beta}$$

Si $\beta = 0.0003$, y el tiempo de fallas se mide en horas, entonces el percentil 95 (p_{95}) es

$$p_{95} = 9985.7 \; horas$$

Es decir, con un 95% de probabilidad una ampolleta funcionará a lo más 9985 horas[8]. En este caso, esta medición no es signo de eficiencia, pueso que está diciendo que solo el 5% de las ampolletas podrán superar las 9985.7 horas.

2 Aplicaciones a la Física

2.1 La caida libre de los cuerpos

Suponga que se deja caer un cuerpo desde una torre de 100 metros. ¿En que tiempo tardará en llegar al suelo y cuál será la velocidad de impacto del objeto al chocar con el suelo? Pues bien, sencillas integrales nos permitirán dar respuestas a estas interrogantes.

[7] En este caso el límite inferior empieza desde el 0 puesto que el dominio de definición de la densidad exponencial es precisamente $[0, \infty)$

[8] En efecto, recuerde que $\Pr\{T < p_{95}\} = 0.95$

Es claro que si dejamos caer el objeto, la única aceleración que estará actuando es la aceleración de gravedad g que es aproximadamente igual a 9.8 $m^2/\,seg$. Y puesto que la variación de la velocidad, $v(t)$, respecto del tiempo es la aceleración tenemos nuestro primer sistema de ecuación diferencial sencillo con condición inicial (la velocidad en el instante inicial es cero, esto es $v(0)=0$),

$$\begin{aligned} \frac{d\,v(t)}{dt} &= g \\ v(0) &= 0 \end{aligned}$$

Integrando la ecuación diferencial, obtenemos

$$v(t) = g\cdot t + cte$$

pero como $v(0)=0$, se tiene que la constante vale cero, y en consecuencia la velocidad del objeto es $v(t)=g\cdot t$.

Por otro lado la variación del desplazamiento, $y(t)$, respecto del tiempo es la velocidad, de modo que tenemos nuestra segunda ecuación diferencial,

$$\begin{aligned} \frac{d\,y(t)}{dt} &= g\cdot t \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

donde la condición inicial es obvia, puesto que en el tiempo $t=0$ no hay desplazamiento. Resolviendo este sistema por integración, obtenemos que

$$y(t) = \frac{1}{2}\,g\cdot t^2$$

Ahora vamos a responder a las preguntas. Puesto que la torre tiene 100 metros el tiempo de impacto ocurre cuando

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2}\,g\cdot t^2 = 100 \\ t &= \sqrt{\frac{200}{g}} \approx \sqrt{\frac{200}{10}} = \sqrt{20} \approx 4.47\ seg. \end{aligned}$$

Y en este tiempo se calcula la velocidad de impacto, siendo aproximadamente $v(4.47) = 10\cdot 4.47 = 44.7\ m/seg$

3 Aplicaciones a la Biología: modelos de crecimiento

Sea $N(t)$ el número de organismos vivos, de una determinada especie, en el tiempo t. Para esta especie vamos a suponer los siguientes postulados

- Los nacimientos son proporcionales al tamaño de la población en ese instante, y la constante de proporcionalidad o tasa de nacimiento[9] es b.

- Las muertes son proporcionales al tamaño de la población en ese instante, y la constante de proporcionalidad o tasa de muerte[10] es d.

Con lo anterior podemos establecer lo siguiente entonces

$$N(t+\Delta t) = N(t) + b\,N(t)\,\Delta t - d\,N(t)\,\Delta t \tag{7}$$

donde la expresión $b\,N(t)\,\Delta t$ denota la cantidad de nacimientos en el periódo $[t, t+\Delta t]$, y la cantidad $d\,N(t)\,\Delta t$ el número de fallecidos en el mismo período. La ecuación dinámica dada en (7) se puede llevar a la forma del cociente de Newton, esto es

$$\frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} = (b-d)\,N(t)$$

si definimos por $k = b-d$, que la podemos traducir por la tasa de sobrevivencia, y pasando al límite cuando $\Delta t \to 0$, nos queda la ecuación diferencial

$$N'(t) = kN(t) \tag{8}$$

La solución de (8) está dada por[11]

$$N(t) = A\,e^{k\,t}$$

[9] Las unidades de las tasas de nacimiento, para la población humana, son (número de nacidos vivos sobre (dividido) 1000 habitantes por año. Est es $\frac{nacidos\ vivos}{1000\ hab. \times\ año}$. De modo que es común oir que la tasa de nacimiento es de 17 por cada mil al año, que se traduce en $b = 0,017\ [1\,/\,año]$

[10] Idem a la tasa de nacimiento pero mutatis mutandis.

[11] En efecto, se aplica la integral sobre la igualdad

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = \frac{d}{dt}\ln(N(t) = k$$

y nos queda $\ln(N(t)) = kt + cte$, y de ahí la conclusión.

para encontrar la constante A, evaluamos en $t = 0$ y concluimos que $A = N(0)$, es decir el valor de la población inicial. De modo que el modelo que regula el crecimiento de una población con los supuestos establecidos está dado por

$$N(t) = N(0)\, e^{k\, t}$$