Aplicaciones de la integral a la Física

Eliseo Martínez Herrera

08 de abril del 2014

Abstract

Esta discusión estará limitada a aplicaciones que son cercanas a la experiencia promedio de un estudiante de ingeniería. Estos apuntes fueron traducidos del libro *Calculus: An Intriduction to Applied Mathematics*, de H.P. Greenspan y D. J. Benney. EDit McGRaw-Hill, 1973, pp. 266-271

1 La densidad de un material

La densidad de un material ρ se define como la masa de una pequeña muestra de material reconocible dividido por el volumen que ocupa esta muestra. Inherente a esta definición existe una restricción de cuán pequeño realmente puede ser la muestra, no siendo de interés para nosotros su composición molecular, para esto vamos a considerar la densidad ρ como una función continua macroscópica como función de la posición. Ya vamos a explicar esto.

Para un medio homogeneo, significa que la densidad ρ es constante en todas partes, y en consecuencia la masa de cualquier volumen V es ρV. Sin embargo, la densidad variable puede estar formada por una mezcla o compòsición de material homogeneo. Por ejemplo, las razones de dos fluidos de densidades constantes que fluyen dentro de un estanque puede ser ajustado con el tiempo para crear un líquido estratificado cuya densidad varía con la altura (piense en un tarro de pintura abandonado un par de horas sin revolver, el fondo del tarro será muchísimo más "espero", denso, que en la superficie).

Si la densidad del medio no es constante, la masa total del volumen es calculada sumando incrementalmente masas de cada elemento diferencial de volumen dV. Y puesto que

$$dm = \rho\, dV$$

la masa total está dada por la integral

$$m = \int \rho\, dV$$

Esta integral, a menudo es posible desarrollar su cálculo cuando la distribución de la densidad es simple y además el cuerpo de la masa es simétrico.

1.1 Ejemplo 1

La densidad de un fluido que llena un receptáculo cónico varía con la altura de acuerdo a la fórmula

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{1}{2}\frac{z}{H}\right)$$

Encontrar la masa del fuido contenido.

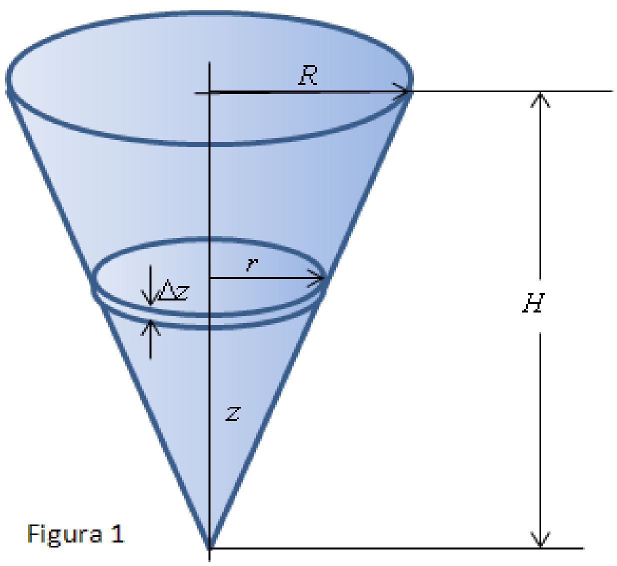


Figura 1

El radio del receptáculo de vidrio a la altura z es $r = (R\,/\,H)\,z$, de modo que el incremento de volumen a esa altura (z) de esta suerte de oblea cilíndica delgada es

$$\Delta V = \pi r^2 \Delta z = \frac{\pi R^2}{H^2}\, z^2 \Delta z \qquad [1]$$

El elemento diferencial de masa es entonces

$$dm = \rho\, dV = \rho_0 \left(1 - \frac{1}{2}\frac{z}{H}\right) \frac{\pi R^2}{H^2}\, z^2 dz$$

de modo que la masa total del fluido en el receptáculo de vidrio es

$$\begin{aligned} m &= \int dm = \frac{\pi R^2}{H^2}\, \rho_0 \int_0^H \left(1 - \frac{1}{2}\frac{z}{H}\right) z^2 dz \\ &= \frac{\pi R^2}{H^2}\, \rho_0 \end{aligned}$$

2 Centro de masa

El equilibrio sobre un balancín (vea la Figura 2) se obtiene distribuyendo dos pesos de tal forma que cualquiera tendencia de rotación del sistema es nula. La disposición a bajar a causa de una carga se mide por el *torque*, que es el producto del peso por una distancia, $w \cdot l$. El equilibrio, entonces, requiere que los torques producidos por cada peso en el balancín sean idénticos, esto es

$$w_1 l_1 = w_2 l_2 \tag{1}$$

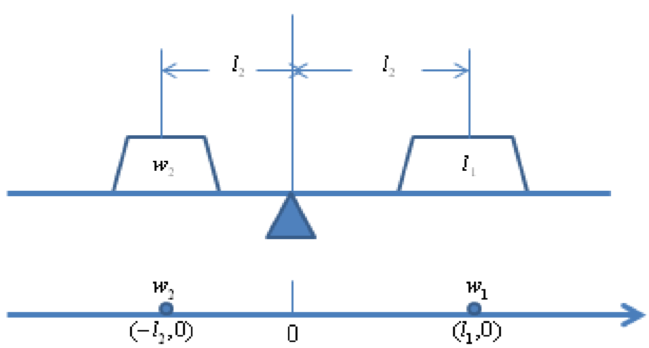


Figura 2

[1] *Nota del traductor:* En efecto, se utilizó la relación

$$\frac{r}{z} = \frac{R}{H}$$

Este principio, descubierto por Arquímedes, es conocido como *la ley de la palanca*. Como lo indica la Figura 2, el peso w_1 induce una rotación en el sentido de las manecillas de un reloj (antiguo), que es contrarrestado por la rotación contraria del peso w_2. Si arbitrariamente establecemos la rotación en el sentido de las manecilla de un reloj como una rotación positiva, de modo que la rotación antihorario es negativa, y si además establecemos un origen de coordenadas en el fulcro[2] 0, entonces (1) se puede expresar como

$$\sum_{i=1}^{2} w_i x_i = 0$$

donde $x_1 = l_1$, $x_2 = l_2$. DE manera más general, si n pesos son ubicados en la palanca, un equilibrio o balance es obtenido solamente cuando

$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i = 0 \tag{2}$$

Supongamos ahora que la situación es a la inversa y buscamos el punto de equilibrio para una distribución arbitraria de n pesos sobre una barra de peso despreciable, como lo indica la Figura 2.

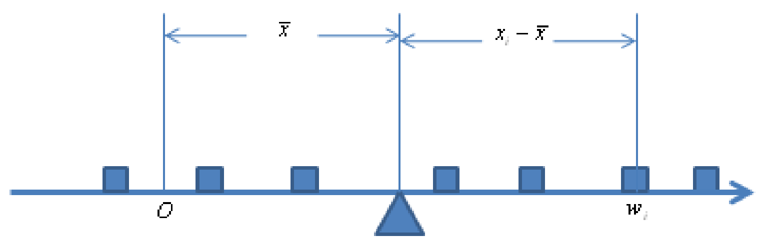


Figura 3

Con respecto al origen O, sea $\bar{x}$ la distancia al punto de equilibrio P. (La barra debería permanecer horizontal si es suspendida por un cordel o soportadda por un fulcro en esa posición). El equilibrio requiere que el torque total alrededor de P sea cero:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i (x_i - \bar{x}) = 0 \tag{3}$$

[2] *Nota del traductor:* Punto de apoyo de una palanca, del latín *fulcrum*.

y esta ecuación se resuelve encontrando

$$\bar{x}= \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \qquad {}^{3} \tag{4}$$

El punto P es conocido como el centro de gravedad; para una aceleración de gravedad, g, constante, este punto también es llamado el *centro de masa* porque peso y masa son proporcionales, $w_i = m_i g$ (el centro de gravedad se refiere a un campo de fuerzas, pero el centro de masa de una propiedad geométrica de la configuración de la materia. Ambos son lo mismo para una constante g, y no haremos más distinción).

Consideremos el próximo problema de encontrar el centro de gravedad (o masa) $\bar{x}$, de una barra de un área seccional uniforme A si su densidad varia continuamente con la longitud. Tomemmos el origen en uno de sus extremos (Figura 4) y el eje x pasa a través de la line central de la barra.

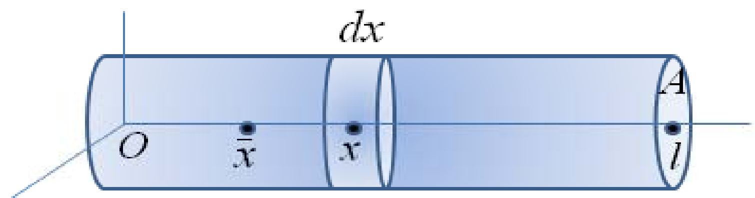


Figura 4

El elemento diferencial de masa[4] en la posición x es

$$dm = \rho(x)\, dV = \rho(x)\, A\, dx \qquad {}^{5}$$

y esto produce un torque alrededor de $\bar{x}$ dado por

$$g \cdot (x - \bar{x})\; dm = g \cdot (x - \bar{x})\, \rho(x)\, A\, dx$$

[3] *Nota del traductor:* Que no es otra cosa que el promedio ponderado de los valores w_i, siendo el vector de ponderación $(p_1, ..., p_n)$, con $p_i = w_i / \sum_{j=1}^{n} w_j$

[4] *Nota del traductor:* Estas masas diferenciales, una tras otra, son las que se "pondrán" en la barra para que esta mantenga su equilibrio.

[5] *Nota del traductor:* Los conceptos utilizados aquí son: la densidad es igual a la masa dividida por el volumen; y el volumen de un cilidro es el área de la sección por su grosor o longitud.

de modo que para la condición de equilibrio la suma (esto es la integral) de estos torques infinitesimales debe ser nula, es decir

$$\int_0^l g \cdot (x - \bar{x})\, \rho(x)\, A\, dx = 0$$

Entonces

$$\int_0^l (x - \bar{x})\, \rho(x)\ dx = \int_0^l x\, \rho(x)\, dx - \int_0^l \bar{x}\ \rho(x)\, dx = 0$$

despejando $\bar{x}$ (cuidado, este es un valor númerico, desconocido, pero constante, y en consecuencia sale del proceso de integración), nos queda

$$\bar{x} = \frac{\int_0^l x\, \rho(x)\, dx}{\int_0^l \rho(x)\, dx} \tag{5}$$

que es la fórmula análoga a la ecuación (4). Puesto que el denominador deesta expresión corresponde a la masa total M de la barra, la podemos ecribir como

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \int_0^l x\, \rho(x)\, dx$$

Si la densidad es constante, esto es $\rho(x) = \rho_0$, (5) se reduce a

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \int_0^l x\, \rho_0\, dx = \frac{\rho_0}{M} \cdot \frac{l^2}{2} = \frac{\rho_0}{\rho_0\, l} \cdot \frac{l^2}{2} = \frac{l}{2}$$

que resulta evidente bajo estas condiciones de regularidad y homogeneidad.

2.1 Ejemplo 2

Encontrar el centro de masa de una barra de longitud l si su densidad está sada por $\rho = \rho_0\, [1 + sen(\pi x \,/\, 2\, l)]$.

El centro está dado por

$$\bar{x} = \frac{\int_0^l x\, \rho(x)\, dx}{\int_0^l \rho(x)\, dx} = \frac{\int_0^l x\ [1 + sen(\pi x \,/\, 2\, l)]\ dx}{\int_0^l\ [1 + sen(\pi x \,/\, 2\, l)]\ dx}$$

La integral más difícil es evaluada por partes, que es

$$\int_0^l x\, sen(\pi x\,/\,2\,l)\, dx = \left[-\frac{2lx}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2l}\right]_0^l + \frac{2l}{\pi}\int_0^l \cos(\pi x\,/\,2\,l)\, dx$$
$$= \left[\frac{4l^2}{\pi^2} sen\frac{\pi x}{2l}\right]_0^l = \frac{4l^2}{\pi^2}$$

3 Un modelo de crecimiento poblacional

Factores naturales, tales como el espacio y la cantidad de alimentos disponibles, inhiben el crecimiento poblacional. Supongamos que P representa la población de una especie y M el tamaño máximo de una población estable (significando con esto que la razón de muerte es igual a la razón de nacimientos). Discutiremos el modelo de crecimiento poblacional dada por la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = \alpha P(M-P) \tag{6}$$

y encontraremos $P(t)$ si $P(0) = P_0 < M$.

La ecuación diferencial (6) es la aproximación en el límite para Δt pequeño de

$$P(t+\Delta t) \approx P(t) + \alpha P(M-P)\,\Delta t$$

de modo que el "motor" (el flujo) de crecimiento o decrecimiento está dada por la expresión $\alpha P(M-P)$. De esto podemos concluir lo siguiente:

- Si P es pequeño, entonces el crecimiento poblacional (dP/dt) es proporcional a PM, esto es $dP/dt = \alpha PM$
- Si P excede a M, esto es la población excede la capacidad de carga del nicho donde vive la especie, entonces el factor $\alpha P(M-P) < 0$, y en consecuencia hay un decrecimiento puesto que $dP/dt < 0$
- Si la población permanece constante llegando a ser igual a la carga M, esto es $P = M$, entonces la población se estabiliza puesto que en ese caso $dP/dt = 0$.

Vamos a resolver ahora la ecuación diferencial dada en (6)

$$\frac{dP}{P(M-P)} = \alpha\, dt$$

integrando nos queda

$$\int \frac{dP}{P(M-P)} = \alpha\, t + cte.$$

Por otro lado[6]

$$\frac{1}{P(M-P)} = \frac{1}{M}\left(\frac{1}{P} + \frac{1}{M-P}\right)$$

de modo que

$$\int \frac{dP}{P(M-P)} = \frac{1}{M}\ln\frac{P}{M-P}$$

y entonces

$$\frac{1}{M}\ln\frac{P}{M-P} = \alpha\, t + cte.$$

que es lo mismo que

$$\frac{P}{M-P} = C\, e^{\alpha\, M\, t}$$

Imponiendo ahora la condición inicial $P(0) = P_0 < M$, tenemos que

$$C = \frac{P_0}{M-P_0}$$

y la solución final es

$$P(t) = \frac{M}{1 + (M\,/\,P_0 - 1)\, e^{-\alpha\, M\, t}}$$

Observemos que para $\alpha > 0$, si $t \to \infty$ entonces $P \to M$.

4 Ejercicios para desarrollar en equipo

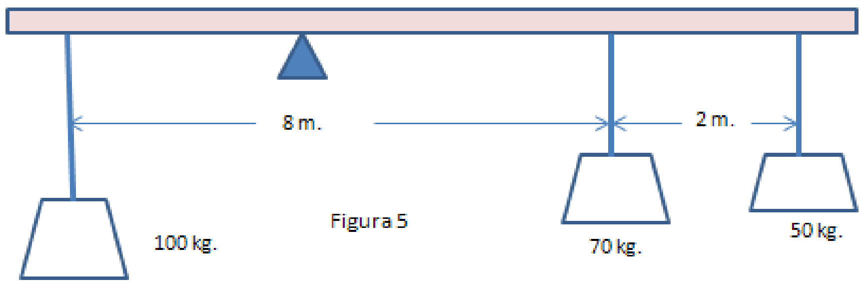
4.1 Problema 1

Encontrar la masa de un fluido contenido en un cilindro vertical recto de altura H y radio a si la densidad del fluido varía con la altura de acuerdo al modelo $\rho = \rho_0(1 + z\,/\,H)^{-1}$

[6] Aquí se utiliza la tècnica de "fracciones separables".

4.2 Problema 2

Para la Figura 5, ¿dónde debiera ser ubicado el fulcro para que el balancín quede en equilibrio?



4.3 Problema 3

La densidad de una varilla delgada de área seccional constante y longitud L varía con la distancia x desde uno de sus extremos de acuerdo al modelo $\rho = \rho_0(1 + (x\,/\,L)^3)$. Encontrar la masa de la varilla y su centro de gravedad.

4.4 Problema 4

Si la densidad $\rho(x)$ de una varilla de longitud l es una función simétrica respecto del punto medio $x = l/2$, esto es

$$\rho(\frac{l}{2} - x) = \rho(\frac{l}{2} + x) \quad para \quad 0 < x < \frac{l}{2}$$

demuestre que el centro de masa es $\bar{x}= \frac{l}{2}$

4.5 Problema 5

Encontrar el volumen de agua (dulce) de una piscina rectangular de 100 metros de largo y 20 metros de ancho, si uno de sus extremos de baja profundidad es de 1,5 metros, y el otro extremo más profundo es de 3 metros, suponiendo que la pendiente entre ambos extremos es constante. Haga una fórmula para encontrar el volumen de agua para cualquier piscina con pendiente constante. ¿Qué sicede si esta piscina se llena con agua salada?

4.6 Problema 6

El crecimiento de una población está limitado por la muerte debido a una variedad de factores. Un modelo matemático está dado por

$$\frac{dP}{dt} = aP - bP^3 \quad ; \quad a, b > 0$$

Resuelva esta ecuación para $P(t)$, y discuta el modelo. Examine si el crecimiento pasa de un estado transitorio a un estaado estable a medida que pasa el tiempo, o examine las condiciones para que esto ocurra.