Universidad de Antofagasta
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Básicas

Desarrollo
Taller de Ejercicios Segunda Prueba.

Resolver cada ítem según corresponda:

I. Convertir en radianes los siguientes ángulos:

a) $316° \Longrightarrow 316 \cdot \frac{\pi}{180} rad = \frac{79\pi}{45} rad = 1.75\pi\ rad$

b) $10° \Longrightarrow 10 \cdot \frac{\pi}{180} rad = \frac{\pi}{18} rad = 0.05\pi\ rad$

c) $127° \Longrightarrow 127 \cdot \frac{\pi}{180} rad = 0.70\pi\ rad$

II. Convertir en grados los siguientes ángulos:

a) $\frac{\pi}{3} rad \Longrightarrow \frac{\pi}{3} \cdot \frac{180}{\pi} = 60°$

b) $\frac{2\pi}{5} rad \Longrightarrow \frac{2\pi}{5} \cdot \frac{180}{\pi} = 72°$

c) $\frac{3\pi}{10} rad \Longrightarrow \frac{3\pi}{10} \cdot \frac{180}{\pi} = 54°$

III. Si $\cot(\beta) = \sqrt{2}$, encuentre el valor de las demás funciones trigonométricas.

Sea $\tan(\beta) = \frac{1}{\cot(\beta)}$ donde $\tan(\beta) = \frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y al racionalizar se obtiene $\tan(\beta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Por lo tanto,

$\sin(\beta) = \sqrt{2}$; $\cos(\beta) = 2$; $\sec(\beta) = \frac{1}{\cos(\beta)} = \frac{1}{2}$; $\csc(\beta) = \frac{1}{\sin(\beta)} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan(\beta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\cot(\beta) = \sqrt{2}$

IV. Determinar el valor de $x = \frac{2\,[\cos(\pi) - 2\sin(\pi)]^3}{\sec(\pi)+\sin(\pi)} - \frac{\tan(\pi)-\cos(0)}{2}$

$$x = \frac{2[-1-(2)(0)]^3}{-1+0} - \frac{0-1}{2} = \frac{-2}{-1} - \left(\frac{-1}{2}\right) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2}$$

Por lo tanto, $x = \frac{5}{2}$

V. Si $\sin(\alpha) = \frac{9}{15}$, $\alpha \in II$ cuadrante. Hallar el valor de $y = \frac{\sec(\alpha)-3\tan(\alpha)}{2\cot(\alpha)-5\csc(\alpha)}$

A partir de $\sin(\alpha) = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ se obtienen:

i) $\csc(\alpha) = \frac{1}{\sin(\alpha)} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$

ii) Por $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

$$\Rightarrow \cos(\alpha) = \sqrt{1-\sin^2(\alpha)} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{25-9}{25}} = \sqrt{\frac{25-9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

iii) $\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)} = \frac{5}{4}$

iv) $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$

v) $\cot(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)} = \frac{4}{3}$

Hay que recordar que al estar α en II cuadrante, se tiene que

$$\sin(\alpha) > 0 \ ; \ \csc(\alpha) > 0 \ ; \ \sec(\alpha) < 0 \ ; \ \tan(\alpha) < 0 \ ; \ \cot(\alpha) < 0$$

Por lo tanto,

$$y = \frac{-\frac{5}{4} - 3\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)}{2\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) - 5\cdot\frac{5}{3}} = \frac{-\frac{5}{4}+\frac{9}{4}}{-\frac{8}{3}-\frac{25}{3}} = \frac{1}{-\frac{33}{3}} = -\frac{3}{33} = -\frac{1}{11}$$

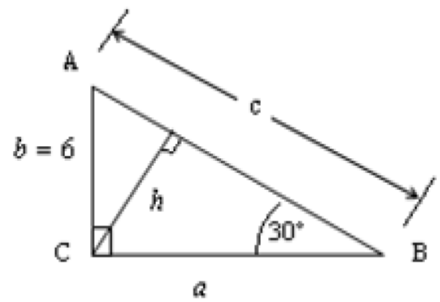
VI. Sin usar calculadora, determine el valor exacto de $x = \frac{2[\cos(45°)]^2 - \sqrt{6}\cdot\sin(60°)\cdot\tan(30°)}{4\sec(45°) - 2\csc(45°)}$

Reemplazando se tiene,

$$x = \frac{2\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]^2 - \frac{\sqrt{6}\sqrt{3}\sqrt{3}}{2\cdot 3}}{4\cdot\sqrt{2} - 2\cdot\sqrt{2}} = \frac{1-\frac{\sqrt{6}}{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\frac{2-\sqrt{6}}{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{2} - \sqrt{2}\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{4\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{4}$$

Por lo tanto $x = \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{4}$

VII. En un triángulo rectángulo ABC, recto en C, se tiene que $\beta = 30°,\ b = 6\ cm$. Hallar las longitudes de a, c y la perpendicular desde el vértice C sobre la hipotenusa.



Sea $\sin(\beta) = \frac{b}{c}$ se tiene

$$\sin(30°) = \frac{6}{c} \Longrightarrow c = \frac{6}{0.5} = 12cm$$

Sea $\cos(\beta) = \frac{a}{c}$ se tiene

$$\cos(30°) = \frac{a}{12} \Longrightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 12 = 6\sqrt{3}cm$$

Dado que la altura h puede obtenerse al conocer los tres lados de un triángulo rectángulo, se tiene

$$h = \frac{a\cdot b}{c} = \frac{6\sqrt{3}\ \cdot 6}{12} = 3\sqrt{3}cm$$

Por lo tanto, $a = 6\sqrt{3}cm$; $c = 12cm$ y $h = 3\sqrt{3}cm$

VIII. Si $\tan(25°) = A$, encontrar en términos de A, el valor de $y = \frac{\tan(205°)-\tan(115°)}{\tan(245°)+\tan(335°)}$

Aplicando fórmula general de reducción, se tiene

$$\tan(205°) = \tan(180° + 25°) = \tan(2 \cdot 90° + 25°) = \tan(25°) = A$$
$$\tan(115°) = \tan(90° + 25°) = \tan(1 \cdot 90° + 25°) = \cot(25°) = \frac{1}{\tan(25°)} = \frac{1}{A}$$
$$\tan(245°) = \tan(270° - 25°) = \tan(3 \cdot 90° - 25°) = -\cot(25°) = -\frac{1}{\tan(25°)} = -\frac{1}{A}$$
$$\tan(335°) = \tan(360° - 25°) = \tan(4 \cdot 90° - 25°) = -\tan(25°) = -A$$

Reemplazando, se obtiene

$$y = \frac{A - \frac{1}{A}}{-\frac{1}{A} - A} = \frac{\frac{A^2-1}{A}}{\frac{-1-A^2}{A}} = \frac{(A^2-1)A}{-(A^2+1)A} = -\frac{(A^2-1)}{(A^2+1)}$$

IX. Demostrar la identidad $\frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{[\cos(\theta)]^2-[\sin(\theta)]^2} = \frac{\tan(\theta)}{1-[\tan(\theta)]^2}$

i) Tomando lado izquierdo

$$\frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{[\cos(\theta)]^2-[\sin(\theta)]^2} = \frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{[\cos(\theta)]^2-[\sin(\theta)]^2} \cdot \frac{\frac{1}{\cos^2(\theta)}}{\frac{1}{\cos^2(\theta)}}$$
$$= \frac{\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \cdot \frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta)}}{\frac{\cos^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} - \frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}} = \frac{\tan(\theta)}{1-\tan^2(\theta)}$$

ii) Tomando lado derecho

$$\frac{\tan(\theta)}{1-[\tan(\theta)]^2} = \frac{\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}}{1 - \frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}} = \frac{\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}}{\frac{\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}}$$
$$= \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \cdot \frac{\cos^2(\theta)}{(\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta))} = \frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{(\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta))}$$

Por lo tanto, (independiente del lado utilizado) se demuestra que

$$\frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{[\cos(\theta)]^2 - [\sin(\theta)]^2} = \frac{\tan(\theta)}{1 - [\tan(\theta)]^2}$$

X. Resolver para ángulos en $[0,2\pi)$ la ecuación $2\tan(x)^2 + 3\sec(x) = 0$

Usando la identidad $\tan^2(x) = \sec^2(x) - 1$, se tiene

$$2(\sec^2(x) - 1) + 3\sec(x) = 0 \Longrightarrow 2\sec^2(x) + 3\sec(x) - 2 = 0$$

Realizamos un cambio de variable donde $u = \sec(x)$, para resolver como una ecuación de segundo grado

$$2u^2 + 3u - 2 = 0 \Longrightarrow u = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(2)(-2)}}{2(2)} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

Donde $u_1 = \frac{-3-5}{4} = -\frac{8}{4} = -2$ y $u_2 = \frac{-3+5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Reemplazando en variables originales, se tiene

$u_1 = -2 \Longrightarrow \sec(x) = -2 \Longrightarrow x = \left\{\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right\}$

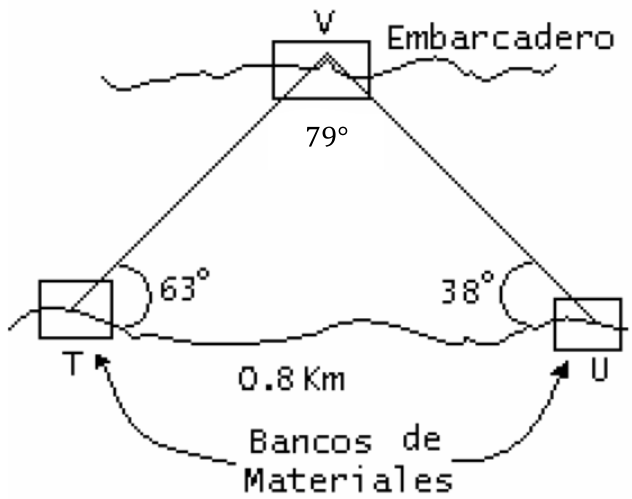
$u_2 = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow \sec(x) = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow x = \operatorname{arcsec}\left(\dfrac{1}{2}\right) \Longrightarrow Sin\ soluci\acute{o}n\ en\ x \in \mathbb{R}$

Por lo tanto, $S = \left\{\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right\}$

XI. Determinar el valor de $arcsen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$x = arcsen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Longrightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

XII. Sobre el margen de un río se localizan dos barcos transportadores de materiales *T* y *U* separados uno del otro por $0.8\ km$ y en la otra margen del río se localizó un sitio *V* donde se construirá un puerto. Los ángulos VTU y VUT miden 63° y 38° respectivamente. Determine en que barco resultará más conveniente traer el material por su cercanía.



Entre el puerto y ambos barcos se forma un triángulo donde el ángulo de V es dado por $180° - 63° - 38° = 79°$

Así,

$$\frac{a}{\sin(63°)} = \frac{0.8}{\sin(79°)} \Longrightarrow a = \frac{0.8 \cdot \sin(63°)}{\sin(79°)} = 0.7km$$

$$\frac{b}{\sin(38°)} = \frac{0.8}{\sin(79°)} \Longrightarrow b = \frac{0.8 \cdot \sin(38°)}{\sin(79°)} = 0.5km$$

Por lo tanto, el barco en que resultará más conveniente traer el material por su cercanía es el barco T con una distancia al puerto de $0.5km$, a diferencia del barco U, con una distancia de $0.7km$.